Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 9; Décembre/December 2013

www.jehps.net

Marc Barbut pédagogue : comment enseigner les probabilités aux étudiants en SHS ?

MICHEL ARMATTE[1]

Résumé

Nous nous intéressons à la proposition de Marc Barbut d'enseigner le calcul des probabilités en partant non pas de la mesure de probabilité mais de la notion d'espérance comme forme linéaire. Nous rappelons le contexte immédiat de cette thèse qui est celui d'un enseignement de mathématique en DEUG de sociologie et psychologie, et le contexte plus large qui est celui de la réforme des « mathématiques modernes » lancée par la commission Lichnerowicz. Puis nous retraçons les diverses formes prises par cette proposition dans trois textes des années 1960 et dans une reformulation de 2000.

Abstract

We are interested in Marc Barbut's proposal to teach probability calculus, starting not from the probability measure but from the concept of expectation as a linear mapping. We recall the immediate context of this thesis, that of teaching mathematics in sociology and psychology (at the undergraduate level), and the broader context which was the reform of "modern mathematics" launched by the Lichnerowicz commission. Then we trace the various forms taken by this proposal in three papers from the 1960s and another one from 2000.

Deux rencontres séminales avec Marc Barbut ont marqué ma quête zigzagante sur le rôle des mathématiques du hasard dans la pratique des sciences de l'Homme et de la société, visant à comprendre le monde qui nous entoure, et aussi le changer comme disait Marx. La première fut à la sortie de mon École d'ingénieur (ENSAM) quand je décidai de poursuivre une carrière universitaire plutôt que celle à laquelle cette école me destinait, et de la poursuivre dans le domaine des maths appliquées aux sciences sociales. Pour cela je m'inscrivis pour la fameuse année universitaire 1967-68 à la fois dans un DEA de statistique mathématique (celui de J.-P. Benzécri) et dans une licence de sociologie à la Sorbonne, que j'avais accepté de reprendre au niveau DEUG2. Si l'enseignement de Benzécri m'a obligé à approfondir ma vision de l'espace métrique à

[1] Université Paris Dauphine et Centre Alexandre Koyré, michel.armatte@dauphine.fr

travers les outils de l'algèbre linéaire, il n'a suscité aucune réflexion sur le hasard et le probable, absents comme on le sait de cette statistique descriptive à l'affut des structures latentes cachées dans les données. Quant au cursus de sociologie j'ai d'abord pensé que mon bagage de « taupe » et d'École d'ingénieur pourrait me dispenser du cours de mathématiques pour sciences humaines d'un certain Marc Barbut, et que je risquais de m'y ennuyer ferme. Il n'en fut rien et je dirai pourquoi.

La seconde occasion de rencontrer Marc Barbut me fut donnée 15 ans plus tard quand je décidai que l'enseignement des statistiques et probabilités aux étudiants d'économie et gestion ne me motivait plus guère, et que la mobilisation de mes connaissances et savoir-faire au service des chercheurs en économie ou en sociologie me condamnait à un rôle assez frustrant de pourvoyeur de techniques pour la recherche des autres sans que la mienne avance. Ayant alors décidé d'aller au bout de mes questionnements sur les usages et mésusages des statistiques en sciences sociales, je décidai, après des années de mathématiques appliquées aux sciences sociales, d'inverser complètement mon point de vue, et de faire de l'outil que j'enseignais l'objet de recherches historiques et sociologiques. C'est alors que je commençai au CNAM un nouveau DEA en Sciences, Technique et Société (1981) et que je commençai à fréquenter plusieurs séminaires de l'EHESS, dont un certain *séminaire d'histoire du calcul des probabilités et de la statistique* (HCPS) qui venait d'ouvrir en 1982-83 sous la direction de Ernest Coumet, Marc Barbut et Bernard Bru, et avec la présence forte de G. Th. Guilbaud. J'ai assisté à quasiment toutes les séances de ce séminaire jusqu'à aujourd'hui. Ce que j'y ai appris m'ouvrit l'horizon sur l'histoire de la discipline que j'avais enseignée (ce que je continuais de faire) et déboucha sur une thèse soutenue bien tardivement (1995) avec un jury dans lequel Barbut, Bru et Coumet figuraient en bonne place.

Je n'en dirai pas plus, ni de mes souvenirs personnels, ni du séminaire HCPS auquel sont consacrés deux autres textes de ce recueil, ni donc du Barbut historien dont l'intérêt et les recherches personnelles ayant ce point de vue sont finalement assez récents, comme le constate aussi Bernard Bru dans ce même dossier. Par contre je vais revenir en détail sur le Barbut pédagogue des décennies 1960 et 1970, et me concentrer sur sa manière, très originale et très efficace d'enseigner les statistiques et les probabilités aux « littéraires ». Commençons par reconstruire la conjonction de l'itinéraire professionnel de Marc Barbut sur cette période et de la situation de cet enseignement dans un contexte politique spécifique.

Licence de math et DES de probabilités et statistique en poche, complétés par une agrégation de mathématiques, Marc Barbut a d'abord enseigné les mathématiques au lycée puis à l'université (Montréal, ISUP, ENSAE), avant de côtoyer la recherche au CNRS (comme attaché) puis à l'École pratique des hautes études VIe section (comme chef de travaux en 1960-62, puis comme directeur d'études). Depuis 1966, il est professeur associé à la Faculté des lettres de la Sorbonne, puis, après la réforme de 1970, à l'Université de Paris 5. Depuis 1962, il est aussi co-directeur du Centre de mathématique sociale (qui deviendra le CAMS) et directeur de la revue *Mathématique et Sciences humaines* (MSH)[2].

Lorsque Marc Barbut est nommé à la Sorbonne en 1966, il a en charge la mise en place d'un enseignement obligatoire de mathématique pour les étudiants des DUEL (1ère et 2e année) de sociologie et psychologie institués par la réforme Fouchet. Il faut se souvenir qu'avant cette date, il n'y a pas de formation en mathématique en dehors des facultés des sciences, et de quelques instituts (ISUP) sauf en économie où la licence

[2] Voir le curriculum vitae de Marc Barbut, ainsi que la liste de ses publications dans ce numéro.

s'est séparée de celle de droit très récemment (1960). Si la licence de psychologie existe depuis 1947, celle de sociologie ne date elle-même que de 1958. La construction du programme et de la méthode Barbut s'appuient sur plusieurs références : son expérience d'enseignement, le colloque organisé par le Centre de Mathématiques Sociales en mai 1962 pour la mise en œuvre concrète des enseignements de façon coordonnée sur tout le territoire, les travaux de la célèbre Commission Lichnerowicz dès 1967, et enfin, les échanges avec ses collègues et assistants (remerciés dans la préface du manuel de 1967 : A.-M. Laulagner, B. Marchadier, J.-L. Piednoir, A. Roumanet, D. Vaguelsy) sans oublier les retours des étudiants dans la première année de cours.

Le colloque organisé par le CMS les 24-26 mai 1962 au Trocadéro, selon le rapport qu'en publie Barbut dans le premier numéro de MSH [Barbut, 1962], a réuni 45 participants, dont une quinzaine provenant des facultés de province, autour d'un noyau qui sont des proches de Guilbaud et Barbut (on citera entre autres Hérault, Jaulin, Latreille, Leplat, Matalon, Morlat, Petruszewycz, Rosenstiehl). Barbut [2002] en rappelle les circonstances et le double objectif : faire le point des enseignements de statistique dans les facultés des lettres et sciences humaines ; et mettre en chantier la préparation de ce que pourraient être les enseignements de mathématique nécessaires. Le colloque a donc d'abord dressé un constat de l'état des enseignements existants, d'où il ressortait que « chaque spécialité attend de la statistique un apport qui lui soit spécifique » et que même chez les psychologues qui sont les plus avancés en la matière, cet enseignement n'était ni unifié, ni sanctionné, ni raccroché à aucune base mathématique. Il n'est pas étonnant dès lors que le colloque en soit venu à prescrire comme orientation principale pour un enseignement de premier cycle une juxtaposition de deux enseignements fondamentaux et parallèles : a) une formation au raisonnement mathématique et au calcul, aux ensembles, à l'algèbre de Boole et à la probabilité ; b) une « simple prise de contact » avec les notions de base de la statistique, la variation aléatoire et ses lois. L'articulation correcte par une initiation technique complète puis par la statistique mathématique ne pouvant se faire que dans les années de licence et de 3e cycle, une dualité forte entre « maths » et « stats » apparaît comme inévitable. Il semble cependant que des voix s'élèvent déjà (Latreille et sans doute Barbut en font partie) pour éviter cela en faisant le choix radical de privilégier « une formation mathématique plus désintéressée dans l'immédiat, mais plus rentable à longue échéance ». En gros, faites d'abord des maths et ensuite, quand vous serez grands, vous verrez à quoi ça sert. Les participants n'étaient pourtant pas sans savoir – il en est fait état dans le rapport – qu'une telle injonction risquait de renforcer l'allergie générale des littéraires aux mathématiques, parfois à l'origine de leur choix des lettres, vu que, dans leurs études secondaires, cette stratégie les avait souvent égarés dans une forêt de signes et de propositions abscons, sans qu'ils n'en voient jamais les bénéfices. Stella Baruk avait fait son miel de leur désarroi. La dernière journée du colloque se tire de cette contradiction avec l'arme habituelle de l'innovation pédagogique :

> *... tout le monde fut d'avis au colloque, que le premier objectif... devait donc être de réaliser une expérimentation pédagogique.*

Quant au programme des enseignements, son contenu sans doute abordé en fin de colloque, était tout simplement irréaliste par son ampleur comme l'est toute réunion de propositions assez peu consensuelles (on pourrait encore aujourd'hui en identifier les auteurs) : algèbre de Boole, calcul linéaire, ensembles, nombres réels, calcul intégral, structures d'ordre, graphes, fonctions, mesure, probabilité, équations de récurrence, séries et calculs approchés. Il me semble que les choix faits par Barbut quelques années plus tard furent, comme on le verra, beaucoup plus restreints et organisés autour d'une véritable introduction mathématique aux statistiques et probabilités, simplifiée mais cohérente et sans concessions. D'où peut être l'optimisme de sa version ultérieure des choses [Barbut, 2002] quand il écrit que :

> *... à l'issue de ces trois journées d'exposés et de débats, les participants avaient dégagé une doctrine claire : pas d'enseignement de la statistique sans enseignement préalable d'un minimum d'algèbre linéaire, de combinatoire et de calcul des probabilités qui permettent à l'étudiant de comprendre ce qui en statistique, n'était le plus souvent enseigné que sous forme de recettes.*

Les réflexions du colloque de 1962 n'étaient pas isolées et révélaient un malaise croissant dans le milieu enseignant qui avait sa trace dans les actions L'Association des professeurs de mathématiques (APMEP), mobilisée dès la fin des années 1950 pour réformer les contenus des enseignements considérés comme « poussiéreux et sans intérêt ». Des enseignants ont alors commencé à introduire des rudiments de théorie des ensembles et de publier des résultats d'expérimentation et de « chantiers »[3]. Marc Barbut a publié dès le début des années 1960 dans le Bulletin de l'APMEP plusieurs documents dont un projet de programme de mathématiques pour les classes de seconde, et l'article séminal sur le calcul des probabilités sur lequel nous reviendrons. Dans sa charte de Chambéry (1962), l'Association dit vouloir enseigner à tous une mathématique utile au monde moderne, le faire avec des méthodes pédagogiques « actives, ouvertes, et non dogmatiques », et créer à cette occasion des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), lesquels accumuleront jusqu'à aujourd'hui un savoir important sur l'histoire, la didactique et la pédagogie des mathématiques. L'APMEP mais aussi la société mathématique de France (SMF) vont jouer un rôle de premier plan dans le débat public qui accompagne dès lors le projet de réforme des mathématiques.

Celui-ci s'insère dans la réforme plus large des structures et des contenus des enseignements secondaire (CES) et supérieur (les Cycles) que Christian Fouchet, Ministre de l'éducation en poste depuis 1962, a entreprise. En 1966, en réponse à l'agitation relative aux mathématiques qui émane essentiellement du milieu des enseignants, comme on vient de le voir, il met en place la Commission Lichnerowicz, du nom de son président qui est aussi le président de la *Société Mathématique de France*. Celui-ci va composer cette commission avec des experts choisis « selon la règle de l'*intuitu personae*… pour leur compétence et pour leur conviction profonde de la tâche à accomplir» [Schiltz, 1984]. Non représentative des acteurs et des conceptions en la matière, la Commission contourne totalement les institutions usuelles, comme le corps des inspecteurs généraux, au prétexte de trouver plus facilement un consensus. En fait, elle le trouvera difficilement et partiellement tant les objectifs de la réforme sont multiples et contradictoires. Il s'agit en effet tout à la fois de rattraper le retard de l'enseignement sur la recherche mathématique, en particulier sa réunification par *La* mathématique de Bourbaki, et de prendre acte que celle-ci est partout, au cœur de toutes les sciences, mais aussi dans la société, comme « langage universel de la civilisation moderne » ; l'ignorer ou se priver de ses lumières c'est « *vivre en infirme ou en sujet* » selon Walusinski [1970]. « *Si l'on ne songe pas au rôle capital des mathématiques, c'est la décadence du pays qui s'en suivra* » dira Revuz (cité par M.A. Schiltz [1984, note 33]). Pour Lichnerowicz :

> *Ce n'est pas pour former des mathématiciens professionnels purs ou appliqués qu'un renouvellement de l'enseignement mathématique à l'école a été nécessaire ; ce l'est surtout et d'abord pour les futurs citoyens,* [...] *qui ne*

[3] Voir la présentation d'Évelyne Barbin : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Barbin-APMEP-R-forme_math-matiques_modernes.pdf

> *devront pas subir passivement les trames variées qui leur seront proposées ou imposées, qui ne devront pouvoir dire non à tels manipulateurs trop adroit d'ordinateurs, et ne pas capituler devant un terrorisme pseudo-scientifique* [L'école libératrice, janvier 1973].

Les deux arguments, internaliste (un progrès des sciences mathématiques) et externaliste (un besoin de la société), ne sont ni de même nature ni forcément compatibles. Le rôle de la vague structuraliste qui s'empare d'abord de la linguistique et de l'anthropologie, puis de nombreuses sciences sociales, n'est pas mince dans la promotion des mathématiques modernes où elles trouvent des outils de formalisation des structures qu'elles dégagent d'observations ou de reconstructions purement théoriques[4]. Mais la contradiction entre ces deux arguments est soulevée par des usagers des mathématique appliquées qui font remarquer que les besoins de l'industrie et du commerce en matière de mathématiques ne renvoient pas tant aux « mathématiques modernes » qu'aux chapitres les plus classiques de l'algèbre et l'analyse. Cette position aboutit d'ailleurs à une scission de la commission entre d'un côté les puristes et élitistes attachés au premier argument, internaliste-bourbakiste, et de l'autre côté les défenseurs d'une mathématique appliquée dont l'utilité sociale pourrait motiver la réforme, et ces derniers rejoignent finalement les opposants à la réforme, regroupés en 1973 dans *l'Union des Professeurs et Utilisateurs de Mathématiques*. Les travaux de la commission sont bloqués, et la polémique gagne l'espace public où elle s'enrichit de nouveaux enjeux : par exemple celui du rôle sélectif omniprésent des mathématiques, en relais du latin, de l'école primaire à l'École polytechnique, ou encore du rôle qu'elles jouent dans l'ordre social, par le dressage des consciences et … de l'inconscient, ce terme faisant référence aussi bien à Freud, Lemaire, Sibony qu'à Hadamard [Blanchard-Laville, 1984]. Marc Barbut, qui fut (avec Guilbaud) membre de cette commission Lichnerowicz depuis 1967, ne s'est guère distingué dans les débats de ce genre et tout porte à croire qu'il s'en est tenu à l'écart par sagesse et sens de la mesure. Un indice important de cette attitude est son article de 1969 sur « quelques points relatifs à l'enseignement élémentaire des mathématiques » dans lequel il fait la démonstration que la controverse fait fausse route quand elle oppose « mathématiques modernes » et « mathématiques de papa » ou encore « mathématiques quantitatives » et « mathématiques qualitatives ». Pour lui il y a des liens très profonds entre la théorie des ensembles et la mathématique classique et il le montre sur deux exemples (le simplexe des parties d'un ensemble, et la transformation exponentielle), dont il en propose chaque fois plusieurs représentations : ensembliste (booléenne), arithmétique (divisibilité), vectorielle (parallélotopes), géométrique (dans R^n), développant au passage une conception pluraliste, non dogmatique, de LA mathématique :

> *il ne faut pas cristalliser l'attention des jeunes sur une représentation particulière* (fut-elle « moderne » – pense-t-il à la représentation omniprésente des ensembles en diagrammes de Venn ?) *d'une abstraction, ne pas créer d'opposition factice entre divers chapitres des mathématiques, et éviter que la mise à jour de l'enseignement des mathématiques ne se fasse en passant à côté des acquisitions plus fondamentales de celles-ci au cours des cent dernières années.*

Ces débats ont donc fonctionné pour lui comme une toile de fond à sa réflexion pédagogique, constituant deux sortes de repoussoirs visibles dans ses choix : celui de l'abstraction élitiste excluante, (la fameuse définition de la droite par Leray) et celui de

[4] Sur le rôle du structuralisme dans la réforme, dans ses deux versions mathématique (bourbakisme) et anthropologiques (Lévi-Strauss), voir Armatte, in *Les sciences au Lycée,* Vuibert, 1996 ; ainsi que l'enquête du collectif *Les Messaches* (Armatte, Feldman, Leclerc, Monjardet, Schiltz, Selz-Laurière) dans la Vie des sciences 1999 sur un bilan de vingt ans de *Mathématiques et Sciences humaines*.

l'empirisme sans rigueur, voire du « n'importe quoi », qui a souvent présidé à l'enseignement des statistiques.

Comment donc enseigner les « mathématiques du hasard » à des étudiants en sciences humaines ? Notons que Barbut a préféré et pour ses manuels et pour sa revue ce terme de « sciences humaines » à celui de « sciences sociales » sans doute pour mieux inclure la psychologie qui faisait explicitement partie des programmes de la Faculté des lettres et pour exclure l'économie qui n'en relève pas et dont il connaissait mal les problématiques et les représentants, à la différence de Guilbaud qui y avait consacré le début de sa carrière (voir son entretien avec J.F. Bayart). Marc Barbut dispose au début des années 1960 de deux modèles, celui de la faculté des sciences et des écoles d'ingénieur, ou bien celui des filières économiques de l'université ou des écoles de commerce. En gros, les ingénieurs des meilleures écoles apprenaient que le calcul des probabilités n'était qu'une application du calcul intégral et différentiel qu'ils étaient censés bien connaître puisque c'était l'objet principal des 14 heures de mathématique par semaine qu'ils avaient faits en « taupe » ou en propédeutique. Toutefois le calcul des probabilités ne figurait pas explicitement au programme des classes préparatoires, ou bien il était maltraité en fin de programme, et n'était pas inclus dans les traités d'analyse les plus courants[5]. Dans le meilleur des cas, la statistique mathématique pouvait être rattachée au calcul des probabilités par le théorème de Bernoulli (loi faible des grands nombres), mais pouvait aussi en être totalement détachée et faire l'objet de présentations sommaires à base de « lois » tombées d'on ne sait où et de recettes tout aussi arbitraires, dans un cadre appliqué (résistance des matériaux, physique expérimentale…)[6]. Dans les facultés de sciences économiques la présentation des méthodes statistiques se faisait sans recours aux probabilités, celles-ci n'intervenant éventuellement qu'en fin de licence, pour justifier les outils de statistique inférentielle, et sous la forme canonique de règles des probabilités totales et composées. Prenons quelques exemples dans les manuels contemporains de celui de Barbut. Le premier est un classique de l'enseignement économique dans lequel la probabilité, maltraitée, n'y occupe qu'une place anecdotique. Le second, également destiné aux économistes est plus ambitieux et complet du point de vue probabiliste. Le troisième est un classique des études biologiques très complet sur les probabilités : formulation ensembliste, définition axiomatique, formule du binôme, variables continues, loi faible et forte des grands nombres.

Montjallon, 1963, *Introduction à la méthode statistique*, Vuibert : rédigé par un professeur agrégé du CNAM pour un enseignement des techniques économiques et comptables et pour l'enseignement technique plus généralement, convaincu que « la statistique devra faire partie du bagage intellectuel de l'honnête homme de la fin de notre siècle ».

- chap. 1-2-3 : la statistique, la collecte des faits, la présentation des données
- chap. 4 : Analyse statistique : valeurs typiques
- chap. 5 : théorie des probabilités et lois statistiques ; la probabilité est définie comme « rapport du nombre des cas favorables sur celui les cas possible lorsque ces derniers

[5] Il ne figure pas, par exemple, à la table des matières du manuel d'analyse de Couty et Ezra édité par A. Colin en 1967 dans la collection U en deux tomes volumineux qui m'ont accompagné en « taupe ».

[6] Dans certaines écoles comme les Arts et Métiers, la lutte faisait rage entre les anciens professeurs (des ingénieurs des A & M) qui justifiaient la dimension d'un boulon dans une charpente métallique par l'usage et l'habitude, et les nouveaux professeurs sortis de l'ENSET qui nous les faisaient calculer par une intégrale).

sont regardés comme également probables ». Calcul fondé sur la combinatoire. Pas d'allusion au théorème de Bernoulli. Pas de variables continues.

- chap. 6 : ajustement d'une courbe à des données
- chap. 7-8 : corrélations et interprétations
- chap. 9-10 : nombres indices et séries chronologiques
- Appendice mathématique sur la combinatoire et sur les fonctions

Girault M. (1967), *Éléments de méthodologie statistique*, Paris, Dunod, est un ouvrage destiné aux étudiants de l'ISUP et de la Faculté de droit et sciences économiques, qui ne repose pas sur une approche algébrique unifiée, mais qui est relativement original dans son articulation fine entre probabilité et statistique :

- chap. 1-2 : introduction, statistique descriptive
- chap. 3 : calcul des probabilités (approche axiomatique ensembliste et booléenne dans le cas fini, extension cas dénombrable et continu, échantillons aléatoires, moments, lois
- chap. 4 : décision statistique : formulation de Neyman-Pearson, critère de Pascal, jeux (minimax)
- chap. 5 : calcul pratique d'indices et de moments
- chap. 6 : lois de probabilités usuelles
- chap. 7 : estimation
- chap. 8 : tests d'hypothèses (ajustement, comparaison, indépendance)
- chap. 9 : liaisons, corrélation, régression.

Heller (1968), *Manuel de statistique biologique*, Paris, Gauthier-Villars est l'œuvre d'un biologiste qui s'en explique : il est le mieux à même de construire un compromis entre rigueur mathématique et référence constante aux applications.

- Statistique descriptive : représentation graphique de la distribution et paramètres
- Calcul des probabilités
- Fréquence limite et probabilités totales (avec combinatoire)
- Probabilités composées
- Variables aléatoires
- Loi des grands nombres
- Distributions binomiale, Poisson et Laplace-Gauss
- Échantillonnage, estimations et tests
- Séries doubles, régression et corrélation.

Il est évident que l'enseignement du calcul des probabilités aux « littéraires », apprentis psychologues ou sociologues ne pouvait s'inspirer directement d'aucun de ces modèles. D'une part parce qu'ils n'étaient guère satisfaisants quant à la rigueur des fondements de la probabilité et, d'autre part, parce qu'ils supposaient tous des étudiants ayant une bonne capacité au calcul algébrique et numérique (le « cunu ») soit combinatoire soit intégral. Comment éviter de reproduire et d'amplifier pour cette population les manquements à la rigueur observés déjà pour des cursus d'ingénieurs ou d'économistes ? Comment concilier cet impératif de rigueur et celui du sens qui s'impose dans les sciences humaines où l'on doit donner des significations précises à des fluctuations, à des distributions observées ? On dispose de trois textes dans lesquels Marc Barbut explicite la méthode qu'il propose, datant respectivement de 1963, 1966-67, 1967-68, et 2000.

Dans *calcul des décisions, calcul des espérances, calcul des probabilités* (1963), Barbut relie le calcul des probabilités au calcul des décisions en situation d'incertitude via la notion d'espérance. Partant du tableau croisé des éventualités (ou états de la nature A) et des actions possibles (ou décisions, D) et des conséquences C attachées à chacune de ses cases, chacune de celles-ci est évaluée (selon une structure ordinale ou cardinale). Dans ce dernier cas « l'ensemble D des décisions possibles est une partie de l'ensemble R^A des fonctions de A dans R, ensemble des réels ». À chaque décision, donc à chaque fonction f de A dans R, on peut attribuer un poids E(f), homomorphisme de R^A dans R, respectant les opérations d'ordre et d'addition, son espérance, sorte de « valeur » de cette décision quelle que soit l'éventualité qui advient. E(f) peut s'écrire comme une combinaison linéaire des décisions E(Sj) où Sj est une base de l'espace vectoriel des décisions prenant la valeur 1 pour la $j^{ème}$ éventualité et 0 sinon. Sans invoquer aucune métaphysique, on peut appeler probabilité de l'éventualité j cette espérance de la fonction caractéristique de chaque partie de l'ensemble A des éventualités, et ses propriétés en tant que forme linéaire sont celles des axiomes de la probabilité classique dans le cas discret.

Dans *De Pascal à Savage, un chapitre de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités*, texte issu d'une conférence à Knokke-le-zoute, Barbut [1966] se propose à nouveau :

> *de suggérer aux enseignants une voie moins classique, bien que très ancienne et assez naturelle, que celle qui est suivie dans la plupart des manuels pour l'initiation au calcul des probabilités…. La notion de base est celle d'espérance, c'est-à-dire de forme linéaire positive sur un vectoriel de fonctions numériques.*

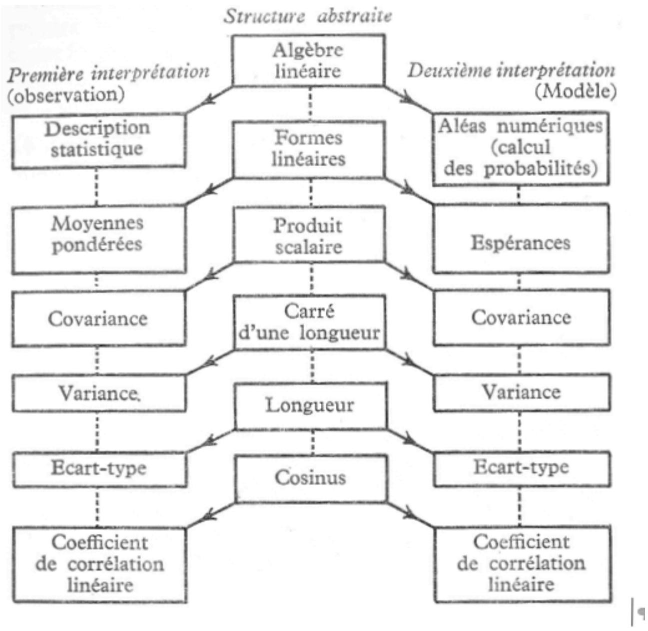
La démarche est identique à celle de 1963 à quelques variantes près. À l'ensemble A des éventualités e_i on associe tout de suite la variable aléatoire des gains associés x_i et l'espace vectoriel des vecteurs $x= (x_1,\dots x_i,\dots x_n)$, muni des opérations somme et multiplication par une constante. L'espérance E(x) est définie comme la *valeur* ou l'*utilité* d'un pari, notion délicate mais qui a néanmoins son histoire depuis Pascal jusqu'à von Neumann. E(x) s'identifie à une application du vectoriel des paris dans R qui en « transporte » les propriétés d'addition $[E(x+y)=E(x) + E(y)]$, de multiplication par un réel $[E(\lambda x) = \lambda E(x)]$, d'élément neutre [si x_i = constante = a alors E(x) = a] et d'ordre $[x\geq y \Rightarrow E(x) \geq E(y)]$, cette dernière propriété signifiant que E est une forme linéaire positive et monotone, ce qui est souhaitable pour un prix. Barbut introduit alors tout événement B comme une partie de l'ensemble A ayant une fonction caractéristique ϕ_B telle que $\phi_B(i) = 1$ si $i \in B$ et qui s'interprète comme le pari dans lequel je gagne 1 franc si se produit une éventualité de B et rien sinon. Alors, si l'on considère la partition de l'ensemble A des éventualités en classes $\{A_1, A_j,\dots, A_k\}$ réunissant les éventualités de même valeur y_j, nous pourrons exprimer tout pari x comme combinaison linéaire des vecteurs de base ϕ_{Aj} $[x = \sum y_j\phi_{Aj}]$ et sa transformation par l'opérateur linéaire E : $[E(x) = \sum y_jE(\phi_{Aj})]$. La quantité $E(\phi_{Aj})$] qui s'interprète comme l'espérance du pari qui vaut 1 si Aj se réalise, peut alors s'écrire $p(A_j)$ puisqu'elle apparaît, seulement maintenant, comme mesure du degré de probabilité de Aj. Le cas de la probabilité continue est préparé par le texte sur les intégrales [1967] que Barbut publie l'année suivante et qu'il introduit par ces mots : « l'article de 1966 appelait une suite sur le cas infini dont la publication est rendue urgente par la mise en place de la seconde année du DUEL de Psychologie et sociologie ». Rejetant l'idée d'enseigner une théorie de l'intégration, Barbut s'en tient ici encore aux deux idées directrices de la linéarité et de l'approximation : l'espérance et donc la probabilité sont encore données par « une forme linéaire positive bornée du vectoriel réticulé des applications de A dans R » mais ce vectoriel n'ayant pas de base dénombrable, leur calcul ne peut reposer que sur une approximation… Ne développons pas davantage car la place manque ici et surtout nous sortons de l'épure, car cette question ne fera pas l'objet d'un enseignement de DEUG. Mais l'article sur les intégrales est une pièce qui illustre parfaitement le style pédagogique de Barbut : quand c'est difficile et un peu long, il va à l'essentiel et surtout il prévient de ce qu'il va faire, de ce qui l'anime et nous prend par la main[7].

Lorsque Marc Barbut et son équipe d'assistants rédigent les deux petits volumes de *Mathématiques des Sciences humaines* [1967 et 1968] qui serviront de supports aux enseignements des premiers cycles à la Sorbonne et à l'EPHE (VI^{e} section), cet enseignement de mathématiques reçoit une double justification : former aux deux méthodes d'explication dans les sciences humaines : la quantification et la statistique d'une part, la qualification des structures d'autre part. Dans les deux cas la mathématique moderne est requise. Le tome I (Combinatoire et algèbre) part de la seule notion fondamentale d'application d'un ensemble E dans un autre ensemble F, et en déduit d'une part la notion d'ensemble des parties d'un ensemble E comme application de E dans {0,1} avec sa structure algébrique (simplexe, triangle de Pascal, combinatoire), d'autre part la notion de relation binaire (ordre et équivalence) comme application d'un ensemble ExF dans {0,1}, ouvrant sur la notion de partition. Pour finir la notion d'application numérique (F numérique) ouvre sur la quantification et la statistique descriptive « qui est toujours un classement et un comptage. » Assimiler toute statistique à un n-uple de grandeurs mesurées sur un ensemble permet de considérer les différents types d'échelle de mesure et leurs propriétés spécifiques, et la structure d'espace vectoriel de cet ensemble de n-uples dotés des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Le tome I se termine donc logiquement par la notion de moyenne pondérée dont on révèle facilement la nature de forme linéaire (application linéaire de cet espace vectoriel des échantillons dans R. Il est alors logique que le tome II poursuive, après un rappel des structures numériques et des principales fonctions de variables réelles, par une révision de toutes la statistique descriptive usuelle en s'appuyant sur la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des échantillons possibles : les notions de produit scalaire (forme bilinéaire) et de distance euclidienne entre deux vecteurs ouvrent alors naturellement sur les mesures de dispersion, de covariance et de corrélation, offrant aux étudiants une vision géométrique de ces notions comme l'avait fait Ronald Fisher en 1920. Plus délicat était le traitement de la mesure de probabilité qui constitue le dernier tiers de ce volume. Or curieusement, Marc Barbut ne déploie pas ici la même méthode que celle qu'il a proposée en 1963 et 1966. Il ne commence pas par définir la valeur d'un pari ou son espérance. Il procède de la manière la plus classique du triplet {Ω, P(Ω), p} soient les notions d'ensemble des résultats possibles, d'ensemble des évènements ou partie de Ω muni d'une algèbre de Boole, et de mesure de probabilité, application de P(Ω) dans R qui vérifie les trois axiomes $p > 0$ $p(\Omega) = 1$ et additivité pour des événements incompatibles, justifiés par l'idée qu'on se fait d'une

7 Exemple :

> *Je n'introduis de notions telles que celle d'additivité dénombrable puis de tribu qu'à partir du moment où le problème posé fait comprendre la nécessité de leur introduction. La notion de tribu, par exemple, est parfaitement superflue tant que l'on n'a pas à définir d'intégrale sur R, par rapport à une mesure continue, et rien ne semble plus redoutable pour les débutants que de leur «balancer» d'emblée le classique triplet (Ω, α, p).*

mesure d'un degré de vraisemblance. Barbut nomme « alea » le couple {Ω, p} dans le cas fini, et mobilise à nouveau la notion d'application de Ω dans Ω' pour définir un aléa image dont le cas le plus intéressant est celui de l'alea numérique qu'il développe dans le cas binomial. La notion de produit cartésien permet d'introduire les probabilités conditionnelles, l'indépendance et la formule de Bayes. L'espérance d'un alea numérique f image d'un alea {Ω,p} n'est introduite que tout à la fin de l'ouvrage, d'une façon arbitraire et peu intuitive comme « somme des valeurs de f(x) prises par son image, lorsque x parcourt Ω, et pondérées par leur probabilité p(x) ». Rien ne résume mieux sa démarche d'une mise en parallèle particulièrement éclairante de la statistique d'une part, et de la probabilité d'autre part, comme deux interprétations de structures algébriques linéaires, que le tableau ci-dessous reproduit [Barbut, 1968, p. 247] :



Un inconvénient de cette présentation est toutefois de ne rien dévoiler du rapport direct entre probabilité et statistique. Savoir qu'elles sont des interprétations différentes des mêmes structures mathématiques ne dit rien de la question des lois du hasard, du fondement statistique de la probabilité par le théorème de Bernoulli, et plus généralement de l'inférence statistique telle que la formulera R. Fisher. Un autre inconvénient de cette présentation unifiée par l'algèbre est aussi l'absence de lumière sur la nature du probable en question (ontique ou épistémique, erreur ou variation) ce que l'on ne peut guère demander à la mathématique parce que cela relève de la philosophie et de l'histoire. Effectivement, l'auteur ne dit rien de ces interprétations divergentes à la fin des années 1960.

Enfin il semble que Barbut ait abandonné ici l'idée que la notion d'espérance est première par rapport à celle de probabilité. Pourquoi Barbut en est-il revenu à la version canonique ? Peut-être sous l'influence d'une certaine standardisation des programmes ? Plus probablement des discussions avec ses collègues et assistants. Ne reconnaît il pas explicitement dans sa préface l'influence de discussions avec Henri Rouanet, qui est d'ailleurs l'auteur principal[8] du polycopié « Opuscule de mathématiques et statistique » distribué aux étudiants de l'année universitaire 1967-68 ? On ne peut éliminer l'idée que celui qui écrira 20 ans plus tard [Rouanet ,1987, t. I, p. ix] que :

[8] Avec la collaboration de Barbut, Lambert, Oppenheim, Vaguelsy.

> *la statistique en tant que discipline auxiliaire des sciences humaines ne constitue pas une branche des mathématiques… Un cours d'initiation à la statistique n'est donc pas une entreprise de recyclage en mathématiques.*

n'était sans doute pas en plein accord avec l'approche de Marc Barbut. Les choix ultérieurs essentiels de Rouanet – commencer par « procédures naturelles » de la description, évacuer la probabilité, se soucier des procédures informatiques, déboucher sur l'analyse des données – ont été souvent contestées par Barbut.

Les publications de Marc Barbut des années 1970, tournées vers les questions des structures ordinales puis vers les questions de mesure de l'inégalité, ne font plus guère de place à cette question de la pédagogie des probabilités, et il ne semble pas qu'il soit revenu sur son schéma original *d'enseignement du calcul des probabilités* avant la fin des années 1990. À la fin des années 1980 cependant il publie plusieurs textes sur les moyennes en statistique dans lesquelles les questions de linéarité sont très présentes.

Le papier de 1988 *Sur une classe de résumés statistiques,* se plaçant « d'un point de vue statistique non probabiliste » est l'occasion de mettre un peu d'ordre mathématique dans l'ensemble des formules proposées en général « en vrac » pour mesurer le « milieu » d'une série statistique, et l'approche est de type axiomatique puisqu'elle part d'un certain nombre de conditions « ou règles de bon sens » pour qu'une mesure (application d'un ensemble de suites x dans E méritent le qualificatif de valeur centrale : il retient :

1) l'intermédiarité ;
2) la monotonie (inégalité large) ou la régularité (inégalité stricte) ;
3) l'homogénéité ($v(\lambda x) = \lambda v(x), \lambda > 0$) ;
4) la symétrie (idem avec $\lambda = -1$) ;
5) l'additivité ($v(x + y) = v(x) + v(y)$) ;
6) la translation, forme faible d'additivité ($v(x + hu) = h + v(x)$)

et il montre, par exemple, que la moyenne arithmétique pondérée est la seule à vérifier les propriétés 1, 3, 5. Passant ensuite aux moyennes transformées (il dit « conjuguées ») (au moyen d'une fonction f telle que $f(v'(x)) = v(f(x))$, il montre encore que si l'on se limite aux v(x) qui vérifient les propriétés fondamentales 1, 2', 3 (ou 4), et 6, alors on se restreint à une valeur centrale v du genre arithmétique et, pour f, « aux quatre isomorphismes fondamentaux : fonctions linéaires, exponentielle, logarithme, puissance ». Voilà de quoi mettre un peu d'ordre dans « l'herbier » dit-il des valeurs centrales présentées dans les manuels de statistique élémentaire.

La *Note sur les moyennes de variables aléatoires* (1991) reprend la question du point de vue probabiliste : quelle est la loi suivie par une somme ou une moyenne de variables aléatoires ? L'exposé est plus classique, peu approfondi, et adopte une forme historique en balayant les théorèmes de convergence de De Moivre [1718], Laplace [1812], Liapounoff [1901], Khinchine [1929] avant de faire large place, c'est plus original, aux lois stables de Pareto-Lévy qui seront un sujet majeur de ses travaux ultérieurs, en lien avec la question de la mesure des inégalités.

La linéarité invoquée dans ces travaux (plus d'une vingtaine d'articles) est celle qui caractérise la relation que Barbut [1998, 2003, repris dans 2007] attribue à Fréchet [1925] entre un revenu x et la moyenne conditionnelle m(x) des revenus supérieurs à x. Cette relation est toujours monotone et linéaire dans une distribution de Pareto, voire même proportionnelle pour la première loi de Pareto : $m(x) = \beta x$ avec $\beta = \alpha/(\alpha - 1) > 1$. Mais une telle relation linéaire caractérise aussi les lois contre-paretiennes ($\beta < 1$) et les lois exponentielles ($\beta = 1$). Pareto propose, à la suite de Fréchet d'en faire le principe d'ajustement privilégié de données empiriques par ces lois plutôt que de se servir de la linéarisation par les logarithmes de la distribution cumulée. Ici encore la moyenne (espérance) est plus intéressante que la fréquence (la probabilité), et l'on peut toujours passer à la médiane quand il n'y a plus de moyenne ($0 < \alpha \leq 1$).

Revenons pour finir à la pédagogie de la probabilité et au *remarquable*[9] texte de Barbut [2000] qui, bien que sortant de la période qui m'intéressait, ne sort pas de sa problématique, et en marque même une sorte d'aboutissement. Le texte se propose de nouveau de contourner l'approche directe de la notion de probabilité, qu'il trouve « abstrait et non intuitif »[10], et de construire une « axiomatique de l'espérance mathématique » compatible avec les axiomes du calcul des probabilités de Kolmogorov. Barbut voit trois justifications à cette démarche. D'abord « elle correspond à ce qui s'est passé historiquement », en particulier quand Pascal invente le calcul d'espérance, première pierre d'une *alea geometria*, fixant la règle d'un parti (partage de gain) dans un jeu interrompu, par un raisonnement récursif sur la valeur d'un alea (une partie de pile ou face), sans jamais parler de probabilité. L'argument est nouveau dans le corpus qu'on vient de balayer, et l'on voit ici tout le bénéfice que Barbut a tiré des débats sur cette question initiés par Guilbaud dès les années 1960, et poursuivis depuis 1982 au séminaire HCPS par Coumet, puis Meusnier et Godfroy-Genin. Le second argument est celui qu'il avait mobilisé dès le début : cela permet de bien situer ces théories dans le domaine des applications des mathématiques à la décision dans l'incertitude. Enfin, argument « décisif » dit-il, lui aussi constamment affirmé depuis 1962 : cela met le calcul des probabilités dans le cadre général de l'algèbre linéaire, « présent partout ». Enfin Barbut s'en tient au cas fini et discret, le seul qui soit adapté au débutant.

Je ne reprends pas par le détail la construction qui suit la logique des textes de 1963 et 1966, mais la terminologie qui s'est précisée : Le vectoriel des *paris* (ou loteries) définis comme des ensembles d'*éventualités* évaluées par leurs conséquences en termes de gains ou d'utilités et susceptibles d'opérations (addition, multiplication par un scalaire). La *valeur*, l'*utilité*, le *juste prix* de ces paris, la *prime d'assurance* que l'on serait prêt à payer, c'est ce qui permet de les comparer et d'exercer un choix, et qui prend la forme d'une forme linéaire appelée « espérance », que l'on devra « naturellement » supposer intermédiaire, homogène et additive, donc positive. Comme toute forme linéaire positive $E(x)$ se calcule comme produit scalaire $E(x) = p'x = \sum p_i x_i$. Reste à interpréter les p_i, algébriquement, comme espérance $E(e_i)$ des vecteurs de base du vectoriel, économiquement comme « la valeur d'un pari dans lequel je gagne une unité monétaire si l'éventualité i se produit et 0 sinon », et donc pour finir comme le *degré de probabilité* (à connotation subjective) de i. Le couple (x, p) est une *variable aléatoire*. Et l'on peut dès lors, après une introduction de l'algèbre des évènements, retrouver les propriétés classiques des probabilités dont les axiomes de Kolmogorov. Les probabilités conditionnelles et la fameuse règle de Bayes sont elles-mêmes déduites de la notion d'espérance conditionnelle définie par la règle récursive des partis ou

[9] Trois auteurs de ce numéro en l'honneur de Marc Barbut (Bru, Shafer et moi-même) auront distingué ce papier.

[10] Je trouve à vrai dire cette idée contestable, l'idée de probable étant très intuitive et très mobilisée dans la vie courante. Mais elle est surtout très ambivalente car elle est supportée par des prénotions et des connotations diverses et hétérogènes qui font obstacle épistémologique (Bachelard) à sa formalisation. S'y mélangent en particulier des notions métaphysiques sur le hasard (ontique ou épistémique), des interrogations sur sa mesurabilité ou pas (incertitude non probabilisable, objectivité/subjectivité), des difficultés sur son fondement mathématique (de Laplace à Kolmogorov), un rapport délicat à la « possibilité physique » et à la fréquence statistique, et un rôle social des plus complexes dans notre société du *risk assessment* et du *risk management*.

principe de Pascal (l'enchaînement des espérances). Pour finir, le théorème de Bernoulli se présente ici comme un moyen d'estimer statistiquement les probabilités et de leur conférer une interprétation objective.

Cette petite excursion dans une question pédagogique nous aura permis non seulement d'explorer les travaux pédagogiques de Marc Barbut mais de voir comment leur efficacité résulte d'un maillage très fin de plusieurs rationalités, de plusieurs ordres :

1) l'ordre empirique des prénotions naturelles les plus simples (qui ne sont pas des obstacles bachelardiens mais des marchepieds pour une connaissance scientifique) ou encore de ce que son maître Fréchet [1955] appelait les bonnes *abductions*, celles qui font choisir les axiomes non pas au hasard ou par commodité, mais conformément à une expérience du réel.

2) l'ordre des structures mathématiques les plus simples mais les plus générales, construites à partir des notions d'application et de relation binaire : groupes, corps, espace vectoriel, pouvant rendre compte aussi bien de la qualité que de la quantité.

3) L'ordre historique qui ne s'y superpose pas mais dont la trace témoigne des efforts passés, des réussites et des échecs de l'entreprise de connaissance par la quantification et la modélisation.

4) L'ordre praxéologique, celui de l'action, de la décision, que Pascal exprimait par l'injonction du pari : nous sommes embarqués et il faut choisir. Le respect de ces quatre « cités » de la modélisation mathématique ouvre sur une conception pluraliste de sa pédagogie mais aussi de ses usages dans la recherche et dans l'action. C'est ce pluralisme porté par Marc Barbut qui m'a plu et qui m'a inspiré aussi bien dans mes propres pratiques d'enseignement que dans mes réflexions à leur sujet [Armatte, 2010]. J'espère avoir réussi à en convaincre d'autres.

BIBLIOGRAPHIE

ARMATTE M. (1995), *Histoire du modèle linéaire. Formes et usages en statistique et en économétrie jusqu'en 1945*, Thèse EHESS, sous la dir. de J. Mairesse.

ARMATTE M. (1996), « Mathématiques "modernes" et sciences humaines », in B. Belhoste, H. Gispert, Hulin N. (dir.) *Les sciences au Lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger,* Vuibert – INRP.

ARMATTE M. (2010), « Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique », Congrès francophone international sur l'enseignement de la statistique, Lyon, 11-13 septembre 2008, *Statistique et enseignement* &(2), p. 23-47.

BARBIN E. (2010), *La réforme des mathématiques modernes et l'APMEP*, Conférence, http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Barbin-APMEP-R-forme_math-matiques_modernes.pdf

BARBUT M. (1962), « Le colloque sur l'enseignement des mathématiques et de la statistique pour les sciences humaines », *Mathématiques et Sciences humaines* 1, p. 11-28.

BARBUT M. (1963), « Calcul des décisions. Calcul des espérances. Calcul des probabilités », *Mathématiques et Sciences humaines* 2, p. 15-24.

BARBUT M. (1966), « De Pascal à Savage. Un chapitre de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités », *Mathématiques et Sciences humaines* 15, p. 15-28.

BARBUT M. (1967), « Intégrales et mesures : introduction en vue du calcul des probabilités », *Mathématiques et Sciences humaines* 27, p.1-28

BARBUT M. (1967), *Mathématiques des sciences humaines. I. Combinatoire et Algèbre,* Paris, Presses Universitaires de France, 2e éd., *ibid.*, 1969.

BARBUT M. (1968), *Mathématiques des sciences humaines. II. Nombres et Mesures,* Paris, Presses Universitaires de France, 2e éd., *ibid.*, 1970.

BARBUT M. (1988), « Sur une classe de résumés statistiques : les valeurs centrales », in *L'à peu près, aspects anciens et modernes de l'approximation*, éd. EHESS, p. 109-142.

BARBUT M. (1991a), « Notes sur les moyennes de variables aléatoires », in *Moyenne, milieu, centre,* éd. EHESS, p. 31-43

BARBUT M. (1991b), « Moyennes et valeurs centrales », in *Moyenne, milieu, centre,* éd. EHESS, p. 135-151.

BARBUT M. (1998), « Une famille de distributions : des paretiennes aux contre-paretiennes », *Mathématiques et Sciences humaines* 141, p. 43-72.

BARBUT M. (2000), « Une application de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités », *Mathématiques et Sciences humaines* 150, p. 81-98.

BARBUT M. (2002), « *Mathématiques et sciences humaines* a quarante ans », *Mathématiques et Sciences humaines* 160, p. 5-6.

BARBUT M. (2007), *La mesure des inégalités. Ambiguïtés et paradoxes,* Librairie Droz.

BARUK S. (1973), *Echec et maths,* Paris, Le Seuil.

BARUK S. (1977), Fabrice ou l'école des mathématiques, Paris, Le Seuil.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1980), Les étudiants en psychologie face à l'enseignement de statistique, Thèse 3e cycle, UER de Didactique, Université Paris 7.

FRÉCHET M., (1925), *Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus*, XVIe session de l'Institut International de Statistique, Rome.

FRÉCHET M., (1955), *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France.

LAPLACE P.-S. (Marquis de) (1812), *Théorie analytique des probabilités*, Paris, Courcier.

LES MESSACHES (1989), « Mathématiques et sciences humaines : des années soixante aux années quatre-vingts », La vie des sciences. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome 6(1), p. 59-76 ; n°2, p. 139-165.

LIAPOUNOFF A. M. (1901), « Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités », *Mémoires Acad. des Sciences de St. Petersbourg,* p. 121-124.

LICHNEROWICZ A. (1972), « Bilan d'une réforme », *Science et Avenir,* « La crise des mathématiques modernes », n° spécial.

MOIVRE A. (DE) (1718), *The doctrine of chances: or, A method of calculating the probabilities of events in play*, 1st ed., London, Pearson, 2d ed., London, Woodfall, 1738.

REVUZ A. (1996), « La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960 », in B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin (dir.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger,* Vuibert – INRP.

SCHILTZ M.-A. (1984), « Analyse des épisodes d'une controverses : la réforme des mathématiques des années soixante », in Armatte *et al.* (éd.), *Le sujet et l'objet : confrontations,* Paris, éd. du CNRS.

WALUSINSKI G. (1970), *Pourquoi une mathématique moderne*, Paris, Armand Colin.