Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 8; Décembre/December 2012

www.jehps.net

La réception de la théorie des probabilités de Laplace chez les algébristes anglais (1812-1854)

MAR1E-JOSÉ DURAND-RICHARD[1]

Résumé

Le réseau des algébristes anglais est surtout connu comme initiateur d'une conception purement symbolique de l'algèbre, censée avoir nourri son développement comme étude des structures abstraites. Si la *Mécanique Céleste* de Pierre-Simon de Laplace (1746-1827) est souvent créditée comme un des facteurs déterminants de ce renouvellement des recherches sur l'analyse algébrique en Angleterre, la *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) est beaucoup moins souvent évoquée. Ses méthodes comme ses contenus ont pourtant alimenté le développement d'une conception unifiée de la connaissance mathématique, celle des savants comme des praticiens, tant d'un point de vue épistémologique que politique. Cette théorie a été explorée en deux temps : d'abord du point de vue des méthodes, par la première génération de ces algébristes, puis du point de vue des contenus, essentiellement par Augustus de Morgan (1806-1871). George Boole (1815-1864), en relisant la *Théorie Analytique* au filtre de l'algèbre symbolique, ouvrira le champ d'une analyse logique des probabilités.

Abstract

The English algebraists network is above all known as the pioneer of a purely symbolical view of algebra. This view is supposed to have fostered its development as the study of abstract structures. If the *Mécanique Céleste* of Pierre-Simon Laplace (1746-1827) is often credited as one of the main factors of the renewal of researches on algebraic analysis in England, the *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) is much less often mentioned. Its methods and its contents have yet promoted the development of a unified approach to mathematical knowledge, for scholars as well as for practitioners, as an epistemological and political points of view. This theory has been explored in two stages: firstly for its methods by the first generation of algebraists, then for its contents, mainly by Augustus de Morgan (1806-1871). George Boole (1815-1864), reading the *Théorie Analytique* with the filter of symbolical algebra, opened the scope of a logical analysis of probabilities.

---

[1] Maître de conférences honoraire de l'Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis, chercheuse associée de l'Université Paris Diderot, *Sorbonne Paris Cité, SPHERE, UMR 7219 CNRS, Univ Panthéon Sorbonne, F-75205 Paris, France,* bâtiment Condorcet, case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris cedex 13, Paris, France. mjdurand.richard@gmail.com.

INTRODUCTION

La *Mécanique Céleste* (1799-1825) de Pierre Simon de Laplace (1746-1827) est généralement reconnue comme un des facteurs déterminants de l'émergence de l'Algèbre Symbolique en Grande-Bretagne dans la première moitié du $19^{ème}$ siècle. Mais l'analyse de son impact sur les mathématiciens anglais s'arrête en général à la possible réconciliation qu'offre alors Laplace entre le calcul fluxionnaire et le calcul différentiel, qui s'étaient développés séparément en Angleterre et sur le Continent, depuis la querelle de priorité ayant opposé Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried W. Leibniz (1646-1716) quant à l'invention du calcul infinitésimal[2]. L'urgent besoin de refonder l'enseignement dans les universités anglicanes, confrontées aux transformations socio-culturelles issues la Révolution Industrielle (1760-830)[3] dans cette même période, en est un autre moteur essentiel. Le problème concerne aussi bien la logique scolastique à Oxford que la géométrie euclidienne à Cambridge. Mais l'Algèbre Symbolique ne vise pas seulement à fonder l'algèbre comme science. Elle ambitionne de produire des méthodes nouvelles, plus rigoureuses que l'induction et l'analogie mobilisées par Laplace, pour la résolution des équations différentielles. Le programme laplacien, qui étend et approfondit la philosophie naturelle de Newton – au point que Laplace soit qualifié de second Newton ! – se doit d'être refondé, à des fins de réappropriation nationale. De fait, cette approche symbolique n'envisage pas l'algèbre comme étude prospective de structures abstraites – comme les historiens le pensent trop souvent – mais comme l'expression générale – symbolique – des modes de raisonnement, qu'il s'agisse du raisonnement certain ou du raisonnement probable. C'est ici que l'impact – le plus souvent ignoré – de la *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) de Laplace prend tout son sens. Elle permet de conjuguer l'ambition d'une connaissance des vérités nécessaires et les hésitations de la méthode expérimentale.

L'analyse des méthodes inductives qui guident Laplace dans ses premiers articles concernés par la théorie des hasards, a déjà été identifiée comme une des sources du développement du calcul des opérations par ce réseau d'algébristes. Cet apport sera d'abord rappelé ici dans une première partie, en insistant sur l'analyse historique du symbolisme qui conduit Laplace dans sa présentation des fonctions génératrices, et qui introduit sa théorie des probabilités. Mais l'impact de cette théorie en Grande-Bretagne devient plus flagrant à partir des années 1830. Augustus de Morgan (1806-1871) lui consacre plusieurs essais, ainsi que deux chapitres de son traité, *Formal Logic* (1847). Raisonnement certain et raisonnement probable y sont associés dans un effort pédagogique manifeste pour initier à ce mode de pensée aussi bien les savants que les actuaires. Quant à George Boole (1815-1864), un tiers de son ouvrage, *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1854), est consacré aux probabilités. Dans une sorte d'effet retour, Boole développe un point de vue original où le travail de Laplace est cette fois ré-interprété à partir des fondements de l'algèbre symbolique et de l'*Essay on Human Understanding* de John Locke (1632-1704). Qui plus est, bien des analogies opératoires qui ont inspiré son écriture algébrique des « lois de la pensée »

[2] C'est là une analyse à courte vue. La double fidélité de Cambridge à la géométrie euclidienne et au calcul fluxionnaire de Newton s'articule bien plutôt sur l'ancrage des universités anglicanes sur les valeurs qui garantissent la permanence d'un lien social fondé sur la religion et le respect de l'héritage des Anciens [McMackin-Garland, 1985, ch. I ; Durand-Richard, 1996]

[3] Il existe deux types de datation pour la révolution industrielle anglaise : une périodisation politique, 1760-1830, qui va du début du règne de Georges III à la fin du règne de George IV, et une datation économique, qui 1780-1850, qui va de la date du brevet de la machine à vapeur au moment du premier recensement qui donne aux villes la suprématie sur les campagnes.

trouvent leur source dans certaines analyses combinatoires de la théorie des probabilités, déjà présentes chez de Morgan.

I : LE RESEAU DES ALGÉBRISTES ANGLAIS FACE À L'ŒUVRE LAPLACIENNE

Le réseau des algébristes anglais est mieux connu sous le nom d'Ecole Algébrique Anglaise [Novy, 1968]. Lubos Novy qualifie ainsi les acteurs les plus importants de ce réseau, qui ont contribué à la pleine reconnaissance ou à la production de nouveaux objets mathématiques. Ils portent en tous cas un regard spécifique sur l'algèbre, soutenu à la fois par la situation locale et des apports continentaux.

1. Les protagonistes

Pour L. Novy, il s'agit de : Charles Babbage (1791-1871), George Peacock (1791-1858), Duncan F. Gregory (1813-1843), William Rowan Hamilton (1815-1865) Augustus de Morgan (1806-1871), George Boole (1815-1864), Arthur Cayley (1821-1895), James J. Sylvester (1814-1897). Ne retenant que les auteurs ultérieurement reconnus pour leurs nouvelles méthodes symboliques et pour les objets que ces méthodes ont contribué à produire, L. Novy délaisse John F. W. Herschel (1792-1871), qui fut pourtant déterminant dans l'introduction des travaux continentaux à Cambridge. Il néglige également toute une nébuleuse d'auteurs moins connus, mais qui travailleront également à expliciter les lois de ce « calcul des opérations » [Koppelman, 1969, 81-143]. Il inclut par contre W.R. Hamilton, bien que celui-ci ne se reconnaisse pas dans les travaux de ce groupe, qu'il qualifiait d' « école philologique » [Hamilton, 1837]. La diversité même des dénominations susceptibles de caractériser ces auteurs est tout à fait révélatrice de la difficulté à en appréhender l'apport, dès lors que l'accent est seulement mis sur leur caractère novateur. Quoi qu'il en soit, parler de « réseau » plutôt que d'école » permet de qualifier plus adéquatement leur situation. Non seulement ils œuvrent chacun avec une même approche dans des secteurs différents – et non comme des disciples suivant la pensée d'un maître – mais ils se reconnaissent eux-mêmes comme un réseau de réformateurs, et interviennent tout autant sur le terrain épistémologique que sur la politique de la science [Cannon, 1960 ; Morrell & Thackray, 1981]. Les interprétations de leurs travaux abondent, qui les envisagent comme précurseurs d'une conception moderniste de l'algèbre abstraite. Bourbaki les considère à juste titre comme les « premiers, de 1830 à 1850, [à dégager] la notion abstraite de loi de composition, […] appliquant cette notion à une foule d'êtres mathématiques nouveaux » [Bourbaki, 1969, 74]. Pour E. Koppelman, Herschel présage dès 1816 les caractéristiques d'une algèbre [Koppelman, 1969, 68], J. Richards [Richards, 2002] identifie les caractéristiques d'un corps chez De Morgan en 1844, et L. Novy celles d'un groupe abstrait fini chez Cayley en 1854.

Il n'empêche que si ces caractéristiques sont énoncées, les structures correspondantes ne sont pas nommées comme telles, et l'algèbre ne deviendra vraiment étude des structures abtraites que dans la période 1910-1930, avec les travaux de E. Steiniz, E. Noether, et surtout E. Artin et O. Schreier [Sinaceur, 1991, 51]. Plutôt que de chercher à identifier ces algébristes anglais comme « précurseurs » de l'algèbre asbtraite, il semble plus pertinent de resituer leurs idées dans le contexte de leur époque et de leur milieu. Comme l'analyse fort justement Leo Corry, les contenus de la recherche ne sauraient être dissociés de la représentation de la science qui les produit, et qui organise la sélection des problèmes traités, ainsi que la méthodologie de leurs modes de résolution [Corry, 2004, 3-4]. De fait, aucun des algébristes de la première génération ne se spécialise dans l'analyse algébrique. Herschel devient astronome, Babbage se consacre à la conception de ses machines, et Peacock lui-même écrit pour la *Royal Society* de nombreux rapports sur divers sujets de physique. Et dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* publiés à partir de 1821, les articles sur la généralité de l'algèbre restent partie intégrante des recherches sur les « principes mathématiques de la philosophie naturelle ».

2. Comment Laplace réconcilie Newton et Leibniz

L'œuvre de Laplace ouvre la possibilité de penser ces principes en termes analytiques, à condition toutefois de s'attacher à en fonder les méthodes. Comme l'écrit Babbage dès 1813, dans la préface des *Memoirs of the Analytical Society,* le seul volume de cette société créée par un groupe d'étudiants autour de lui pour impulser l'introduction de la notation différentielle à Cambridge :

> The admirable review of *Mécanique Céleste* (Edinburgh Review n° 22) will still be fresh in the minds of our readers. But it should be recollected, that the Author of that Essay confines his attention entirely to the subject of Analytical Dynamics ; referring to the discoveries in the Integral Calculus merely as connected with that syubject, and that too very cursorily, our business is exclusively with the pure Analytics [Babbage, 1813, 11].

Mais la légitimité de l'œuvre laplacienne dépasse de très loin la seule question des notations. De fait, Newton et Leibniz ne s'opposaient pas uniquement au sujet de l'invention du calcul infinitésimal. Leurs divergences quant au système du monde étaient beaucoup plus profondes. Elles portaient sur l'interprétation des écarts constatés entre les observations astronomiques et les déductions de la théorie newtonienne, relatives aux irrégularités de certains mouvements planétaires. L'explication donnée par Newton, selon lequel Dieu, cet « horloger du monde », intervenait directement pour en réguler le cours, ne satisfaisait pas à la théorie de l'harmonie du monde développée par Leibniz, qui contestait du même coup la théorie newtonienne toute entière. C'est sur ce point précis que Laplace réconcilie leurs deux approches : en établissant que les écarts constatés proviennent d'inégalités séculaires qui ne nuisent pas à la stabilité du système solaire, Laplace conforte la théorie newtonienne avec les outils du calcul leibnizien. Il parvient à résoudre des équations différentielles qui était hors de portée du calcul des fluxions, par des méthodes analytiques qui mobilisent différences finies, séries et fonctions génératrices, et qui constitueront les outils fondamentaux de sa *Théorie analytique des probabilités*, publiée en 1812.

Outre la nécessité de former les mathématiciens anglais à ces nouvelles méthodes, et d'apporter une assise théorique plus solide que les méthodes inductives et analogiques couramment pratiquées par Laplace, il reste à lever un dernier verrou pour que la théorie laplacienne soit acceptée outre Manche : le soupçon d'athéisme. Selon le témoignage de l'astronome William Herschel (1738-1822), à Napoléon qui lui demandait où situer Dieu dans son édifice théorique, Laplace aurait répondu en 1792 à Malmaison et en 1808 à l'Académie des Sciences : « Je n'ai pas besoin de cette hypothèse » [Hahn, 2004, 170]. Légendaire ou véridique, une telle déclaration est forcément problématique en Angleterre, où la théorie newtonienne affirmait le temps et l'espace comme les *sensorium* de Dieu, et où la *Natural Theology* (1802) de William Paley (1743-1806) est enseignée dans les universités anglicanes de Cambridge et Oxford, avec *A View on the Evidences of Christianity* (1794). Le Révérend John Playfair (1748-

1819), géologiste, indologiste, et professeur de mathématiques à l'université d'Edinburgh, publie en 1808 un compte-rendu de la *Mécanique Céleste* de Laplace dans *The Edinburgh Review,* revue d'obédience whig et utilitariste fondée en 1802. Soucieux d'encourager ses condisciples à en assimiler rapidement les contenus, et de bousculer les enseignements classiques de Cambridge et Oxford, il s'applique à montrer que le travail de Laplace est compatible avec l'existence d'un « dessein » organisant le monde :

> When we consider the provision made by nature for the stability and permanence of the planetary system, a question arises, which was before hinted at, - whether is this stability necessary or contingent, the effect of an unavoidable or an arbitrary arrangement? If it is the necessary consequence of conditions which are themselves necessary, we cannot infer from them the existence of a design, but must content ourselves with admiring them as simple and beautiful truths, having a necessary and independant existence. If, on the other hand, the conditions from which this stability arises necessarily, are not necessary themselves, but the consequences of an arrangement that might have been different, we are then entitled to conclude, that it is the effect of wise design exercised in the construction of the universe.
> Now, the investigations of La Place enable us to give a very satisfactory reply to these questions; viz. that the conditions essential to the stability of a system of bodies gravitating mutually to another, are by no means necessary, insomuch that systems can easily be supposed in which no such stability exists. The conditions essential to it, are the movement of the bodies all in one direction, their having orbits of same eccentricity, or not far different from circles, and having periods of revolution not commensurable with one another. Now, these conditions are not necessary; they may easily be supposed different; any of them might be changed, while the others remained the same. The appointment of such conditions therefore as would necessarily give a stable and permanent character to the system, is not the work of necessity; and no one will be so absurd to argue, that it is the work of chance. It is therefore the work of design, or of intention, conducted by wisdom and foresight of the most perfect kind. Thus the discoveries of La Grange and La Place lead to a very beautiful extension of the doctrine of final causes the more interesting the greater the objects are to which they relate. **This is not taken notice of by Laplace; and that it is not, is the only blemish we have to remark in his admirable work** [souligné par l'auteur] [Playfair, 1808, 278-79].

Or, Laplace a établi la contingence – et non la nécessité – des conditions de stabilité du système solaire en s'appuyant sur la théorie des probabilités. Son travail étant compatible avec l'existence d'un dessin, ses méthodes, aussi bien la notation différentielle que la théorie des probabilités, acquièrent toute légitimité puisqu'elles aident à l'œuvre de Newton. Cet argumentaire n'est pas purement rhétorique : il sera repris par De Morgan et Boole lorsqu'ils traiteront de la théorie des probabilités de Laplace, avec toutefois un déplacement progressif de sa signification allant de pair avec la laïcisation de l'université.

3. De la mécanique céleste aux probabilités

Les algébristes anglais s'attacheront donc d'abord à approfondir les méthodes élaborées par Laplace pour résoudre les équations différentielles qui structurent ses travaux de mécanique céleste. Bon nombre des mémoires où il élabore ces méthodes, publiés dès les années 1770, portent aussi sur la théorie des hasards, comme par exemple « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements » (1774), « Mémoire sur la théorie des suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards » (1774), « Recherches 1° sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards, 2° sur le principe de la gravitation universelle, et sur les inégalités séculaires des planètes qui en découlent » (1776). La *Théorie analytique des probabilités* synthétise les recherches sur la théorie mathématique des paris, les préoccupations philosophiques et la méthodologie scientifique. Et selon Ch. Gillispie, cette synthèse réalise pleinement le programme de Condorcet, et en élargit les perspectives à l'étude des fondements de l'inférence statistique, de la causalité physique, de l'estimation de l'erreur scientifique, et de la quantification de la crédibilité de l'évidence [Gillispie, 1997]. Tout particulièrement, dans une Angleterre aux institutions fragilisées au sortir de la Révolution Industrielle (1760-1830), elle va permettre d'embrasser dans un même cadre de pensée mathématique tous les registres de la connaissance, du travail de l'actuaire à celui de l'astronome, tout en faisant place aux incertitudes de l'approche expérimentale. L'*Essai philosophique sur les probabilités* (1814) apportera à cette vision synthétique la force de son discours généraliste, qui donne à voir l'ampleur des ambitions et des possibilités du travail de Laplace. Quant à sa célèbre position déterministe sur le caractère asymptotique de toute connaissance du monde à l'égard de sa vérité, elle offre aux réformateurs anglais la possibilité de rassemble dans un même discours la théologie naturelle de Paley et l'empirisme inscrit dans les démarches expérimentales :

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule tous les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; …. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. … Tous ces efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de cette intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné [Laplace, 1814, 3-4].

La réception de Laplace va s'effectuer sur plusieurs terrains. Dès la création de *The Analytical Society,* l'historique du symbolisme algébrique que dresse Laplace pour introduire les fonctions génératrices au chapitre I de la *Théorie Analytique* fonctionne comme élément matriciel pour la conception de l'algèbre symbolique. Parallèlement, W. Whewell (1794-1866) et J. W. Lubbock (1803-65), moins concernés par l'approche symbolique, publient chacun une longue série d'articles dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society,* passant au crible la théorie laplacienne des marées, pour en analyser la possible applicabilité et ses conséquences sur l'étude des océans de l'Empire britannique [Durand-Richard, 2013]. Ces recherches sont fortement soutenues par la *British Association for the Advancement of Science,* créée en 1831 pour forger autour de la science un nouveau ciment idéologique [Morrell et Thackray, 1981] réconciliant érudits et industriels – « learned men » et « practical men » – du côté du pouvoir. L'Ecosse joue encore son rôle d'aiguillon intellectuel, lorsque *The Edinburgh Review* publie en 1830 un article de Herschel, insistant sur l'historique des probabilités et sur leur caractère unificateur. Traduit en français en 1846, « Sur la théorie des probabilités, et ses applications aux sciences physiques et sociales » sera repris par l'astronome statisticien belge A. Quetelet (1797-1874) comme introduction de la nouvelle édition de sa *Physique sociale* en 1860. J. W. Lubbock, à la fois mathématicien, astronome et banquier, publie aussi dès 1830, avec John Drinkwater-Bethune, un court traité d'introduction « On Probability », parfois attribué à de Morgan. Mais le travail de De Morgan est lui-même beaucoup plus déterminant pour installer la *Théorie Analytique des Probabilités* comme un champ de savoir essentiel à tous les niveaux de la société. Premier professeur de mathématiques nommé de la nouvelle Université de Londres (1828), il participe activement à l'effort réformateur. De 1833 à 1843, parmi les centaines d'entrées qu'il publie dans *The Penny Cyclopaedia,* cette encyclopédie bon marché éditée par les utilitaristes de la *Society* *for the Diffusion of Useful Knowledge*, celles qui sont consacrées aux probabilités[4] concernent un grand public cultivé, et surtout les actuaires, auxquels il s'adresse plus particulièrement en 1837, dans son compte-rendu de la *Théorie Analytique des Probabilités* pour la *Dublin Review,* et en 1838, dans son *Essay on Probabilities.* Cet essai est édité par le *Cabinet Cyclopaedia* de Dyonisius Lardner (1793-1859)*,* qui travaille très activement à la diffusion de la science. Parallèlement, De Morgan s'adresse à un public plus initié aux mathématiques lorsqu'il publie en 1837 « A Treatise on the Theory of Probabilities », dans l'*Encyclopaedia Metropolitana*. Cette encyclopédie s'opposait alors au classement alphabétique du savoir propre à l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, et proposait des traités se voulant exhaustifs[5], afin que les représentants de l'Empire britannique, dispersés dans le monde entier, disposent de la somme des connaissances alors disponibles. Mais la théorie des probabilités ne se contente pas de restructurer un vaste champ de connaissances, elle transforme également, comme l'indique Laplace dans son *Essai,* les modes d'appréhension de la connaissance, puisqu'elle jette un pont entre les vérités nécessaires et les vérités contingentes, que Peacock opposait encore dans sa présentation de l'Algèbre Symbolique en 1830. Aussi bien De Morgan que Boole l'auront parfaitement compris, lorsqu'ils mettront sur le même plan raisonnement certain et raisonnement probable. De Morgan s'adresse à la fois aux universitaires et aux étudiants lorsqu'il consacre deux chapitres de son traité de *Formal Logic* au raisonnement probable où il cherche à évaluer la probabilité de la conclusion après avoir introduit la quantification des prémisses [Rice, 2003]. Et lorsque Boole publie *An investigation on the Laws of Thought,* l'assimilation de l'œuvre laplacienne est acquise. Il peut se livrer à une réécriture de la théorie des probabilités à l'aune de l'écriture algébrique qu'il a élaborée pour la logique, en s'appuyant sur les principes fondateurs de l'algèbre symbolique.

II : LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES COMME FERMENT DU CALCUL DES OPÉRATIONS

Dès 1813, Babbage et Herschel sont fascinés par la « vision globale, la profondeur et la pureté » des analyses de Laplace [Babbage, 1989, 1]. Ils ont lu Lagrange, Laplace, Monge, Lacroix et Arbogast, et insistent sur la simplicité et la généralité dont est porteuse la notation fonctionnelle. Dans les cinq articles des *Memoirs* qu'ils se répartissent, ils explorent les propriétés opératoires des fonctions à partir de cette notation pour étendre les méthodes de Monge et de Laplace mobilisant les séries, le calcul fonctionnel, et le calcul aux différences finies dans la résolution des équations différentielles. Le principe de séparation des symboles de quantités des symboles d'opération – ou de fonction – inauguré par L.F.A. Arbogast (1759-1803) est un élément central de leur réflexion sur la notation fonctionnelle :

> It is time that such arbitrary notations should be replaced by one founded on some regular principle, which we have accordingly attempted to do. Analysts will judge whether our attempt has been attended with success. This process is in fact a demonstration of the following theorem : "If F, A, B represent any functional characteristics, such, that FA(x), or F{A(x)}=B(x), or, detaching the symbols of operations from those of

[4] Notamment les articles suivants : actuary, annuity, chance, generating functions, interest, Laplace, mean, least squares (method of), mortality (law of), experiment, probabilities (theory of), recurring series, table, theory and practice

[5] Ces traités faisaient souvent également l'objet de publications séparées. Peacock y publiera un imposant article sur l'histoire de l'arithmétique, De Morgan un traité sur le calcul des fonctions.

> quantity, Fx A=B, then we shall have, $F = BA^{-1}$ or $F (x)= BA^{-1} (x)$, or $F x= B\{A^{-1} (x)\}$." In like manner, if $FAB = C$, we shall have $F=CB^{-1}A^{-1}$, for $FAB=(FA)B$, and consequently, $FA= CB^{-1} = (CB^{-1})$; and again, $F=(CB^{-1})A^{-1} = CB^{-1}A^{-1}$. In general, if $F.\,^{(1)}A.\,^{(2)}A....\,^{(n)}A =B$, we have $F =B.\,^{(n)}A^{-1}.\,^{(n-1)}A^{-1}\ldots\ldots\,^{(1)}A^{-1}$, a theorem of great use, and which sets in clear light the analogy between functional and exponential indices [Herschel, 1813, 98].

La fonction heuristique du théorème de Lagrange – explorée par Laplace et Arbogast – dans le développement du calcul des opérations en Angleterre a déjà été étudiée [Koppelman, 1969]. Mais il importe de montrer comment ces recherches rencontrent les préoccupations spécifiques de cette jeunesse étudiante de Cambridge, soucieuse d'assimiler les travaux continentaux à partir de cadres méthodologiques conçus à Cambridge, et de les réinterpréter à partir de leur volonté réformatrice.

1. Les méthodes heuristiques dans les calculs sur les fonctions

Le théorème de Lagrange ne repose que sur l'analogie entre les puissances numériques et les ordres de différentiation, telle que Lagrange l'observe, entre le développement d'une fonction en série de Taylor :

$$u(z+x)=u(z)+\frac{du}{dz}x+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{d^3u}{dz^3}\frac{x^3}{3!}+etc.$$

et celui qui définit l'exponentielle : :

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+etc.$$

à condition toutefois d'identifier puissance n-ième de la différentielle première et différentielle d'ordre n [Lagrange, 1772]. Reprise par Laplace, cette analogie conduit à écrire l'accroissement fini d'une fonction [Laplace, 1777] sous la forme :

$$\Delta u=u(z+x)-u(z)=e^{\frac{du}{dz}x}-1$$

et la séparation des symboles de quantité des symboles d'opération permet à Arbogast d'écrire ce théorème sous la forme :

$$\Delta u=(e^{x\delta}-1)u \qquad \text{et finalement} \qquad \Delta^n u=(e^{x\delta}-1)^n u$$

où δ désigne d/dz. Cette écriture symbolique introduit une relation opératoire nouvelle entre calcul différentiel et calcul aux différences finies, dont Herschel soulignera l'importance dans les notes à la traduction anglaise du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de S. F. Lacroix (1765-1843) :

> L'opération notée par Δ étant équivalente à la série des opérations notée par $e^{\frac{d}{dx}}-1$, et la répétition n fois de cette dernière série d'opérations étant équivalente à une série d'opérations exprimée par $(e^{\frac{d}{dx}}-1)^n$, il est

évident que l'opération notée par Δ^n est équivalente à celle qui est notée $(e^{\frac{d}{dx}}-1)^n$, et par conséquent $\Delta^n u_x=(e^{\frac{d}{dx}}-1)^n u_x$ [Lacroix, 1816, 486].

Si les travaux du réseau des algébristes anglais sont bien enracinés sur l'écriture symbolique de cette relation, sa fonction heuristique ne leur suffit pas. Au contraire, toute leur réflexion porte sur l'affirmation que de telles formules ne sont pas qu'une manière d'écrire, mais traduisent la « vraie nature » du calcul, dont ils vont s'employer à établir les fondements. Analogie et induction sont considérées comme les manifestations d'un principe opératoire plus fondamental, qu'il s'agit de découvrir et d'expliciter. Dès 1813, la correspondance de Babbage et Herschel, nourrie par leur lecture laborieuse de la *Mécanique Céleste* et de la *Théorie Analytique,* fourmille d'interrogations sur induction, analogie et généralisation :

> I tell you as plainly as man can speak that induction is **an operation of the mind** *sui generis* (if operation can be called) … It is a mere passive habit acquired by the repetition of the same identical impression on the mind which leads to the expectation of its […]recurrence. Analogy is always the result of an effort of imagination [where] partial powers are brought into action. But generalization O Lord O Lord has no more to do with it than the man in the moon. Why the mind of a man generalizing is all in a state of active inflammation. [Herschel, Hs.2.129, 19 march 1820].

La structure même de la *Théorie Analytique des Probabilités* oriente très directement les lignes de recherche qui seront celles des algébristes anglais. Le livre I présente le calcul les fonctions génératrices comme le fondement analytique de la théorie des probabilités. à partir de l'analogie entre le calcul sur les puissances et le calcul aux différences. Il synthétise le mémoire de 1782 sur les suites, et ceux de 1785 et 1786 sur l'approximation, par des intégrales définies, des formules contenant de très grands nombres. Cette synthèse commence par une longue introduction historique, intitulée « Considérations générales sur les éléments de grandeur », qui retrace le développement des notations algébriques accompagnant l'écriture de nouvelles entités algébriques. Viète, Descartes, Wallis, Newton, Leibniz, Lagrange, sont successivement crédités d'avoir suivi le fil de l'analogie et de l'induction, qui a guidé Laplace à son tour vers la théorie des fonctions génératrices, dont il affirme en conclusion :

> **La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques quelconques la notation cartésienne** ; elle montre en même temps avec évidence **l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques**, et nous allons voir tout ce qui concerne les séries et l'intégration des équations linéaires aux différences en découler avec une extrême facilité [souligné par l'auteur] [Laplace, 1812, 7].

Alors que Laplace va utiliser le calcul des fonctions génératrices pour retravailler toute une gamme de problèmes classiques qu'il avait auparavant traités par d'autres moyens, en particulier par les suites recurro-récurrentes, les jeunes algébristes vont surtout explorer les propriétés opératoires obtenues à partir de cette analogie et de la notation puissance appliquée aux fonctions, aux opérateurs différentiels et aux opérations en général. Après ses articles dans les *Memoirs of the Analytical Society,* Herschel publie dès 1814 « Considerations on various points of analysis » dans les *Transactions of the Royal Society*, où il introduit les fonctions génératrices, et énonce le théorème qui porte son nom, établissant une relation entre fonction et différences finies. I. Grattan-Guinness a mis l'accent sur l'importance de la pensée algorithmique dans le travail de Babbage [Grattan-Guinness, 1992]. Celui-ci publie très tôt deux imposants articles sur le calcul des fonctions – qui suffiront à le voir élu membre de la *Royal Society* –, où il développe des méthodes générales, très formelles, de résolution pour les équations fonctionnelles, par analogie avec celles des équations différentielles et aux différences finies, qui apparaissent ainsi comme des cas particuliers des précédentes [Babbage, 1815-16]. L'article « Calculus of Functions » que publie De Morgan en 1836 dans l'*Encylcopaedia Metropolitana* se réclame directement des travaux de Babbage et de Herschel, dont il discute de nombreux exemples[6]. Il cherche à « éclairer les principes de la notation » et à élaborer une « méthode générale qui ajoute à son pouvoir de combinaison », en abordant « la question des signes comme une branche étymologique des mathématiques ». Il est conçu comme étape ultérieure de l'Algèbre Symbolique de Peacock, dont il reconduit les conceptions fondamentales, pour approfondir les implications de la notation puissance pour les fonctions, avec tout un travail sur les fonctions inverses, dont Babbage et Herschel avaient signifié l'importance dès 1814. L'algèbre devient ici un cas particulier du calcul des fonctions, et la théorie des fonctions génératrices est elle-même intégrée à la science des opérations.

2. Des lois opératoires pour fonder l'analogie

Le principe de permanence des formes équivalentes, qui structure l'élaboration de l'algèbre symbolique de Peacock, est précisément destinée à légitimer la présence des analogies opératoires, qu'il ne s'agit donc pas d'éliminer, mais de justifier. Ses principes sont les suivants : cette algèbre symbolique constitue la forme la plus générale de l'écriture algébrique, elle est le « langage du raisonnement symbolique », portant sur des « symboles généraux dans leur forme et dans leur valeur ». Ses résultats ne sont pertinents que vis-à-vis des lois opératoires préalablement définies comme des « lois de combinaison ». Peacock impose ici – et c'est le point le plus fondamental de son travail , la condition d'universalité de cette algèbre symbolique – une séparation radicale, et nouvelle, entre signification numérique des calculs et validité opératoire des résultats. Pourtant, les résultats opératoires de l'algèbre symbolique ne sont pas déterminés axiomatiquement chez Peacock. Ils sont « découverts » à partir des pratiques de l'algèbre arithmétique, conçue comme une « science de suggestion » où se maintiennent toutes les limitations de sens issues de l'origine arithmétique des symboles. Algèbre symbolique et algèbre arithmétique entretiennent donc une relation que le lecteur moderne appréhende comme ambiguë : la première apparaît comme logiquement antérieure à la seconde, mais la seconde constitue la source des expériences qui conduit le mathématicien dans sa découverte[7] des lois générales. Le double « principe de permanence des formes équivalentes » – l'équivalence étant la forme symbolique de l'égalité arithmétique – exprime cette relation ambiguë, explicitement mis en place pour légitimer les analogies opératoires constatées :

> The operations and resulting forms in Arithmetic and Geometry, expressed in symbols, bear **a strict analogy to operations bearing the same names**, and to the forms resulting similarly from them in Algebra, where the symbols are perfectly general : but **it is by the law of the permanence of equivalent forms, and not by analogy**, that we are enabled to pass from one to the other. It is only so far therefore, as Analogy may be

[6] Herschel's Correspondance, *Royal Society,* Hs.6.182 :, lettre de De Morgan à Hershcel du 10 juillet 1836. De Morgan lui en envoie un exemplaire. Il en envoie un également à Poisson, qui se trouve à la BNF à Paris.

[7] Il s'agit bien pour Peacock de « découverte » et non d' « invention », car ce Révérend se situe dans un monde prédéterminé de la théologie naturelle. En tant que réformateur, il affirme le caractère essentiel de l'expérience. En tant que révérend, il n'assume pas jusqu'au bout la liberté du mathématicien qu'il affirme pourtant dans la présentation de son Rapport de 1833.

> considered as a modified expression of this law, that we are legitimately enabled to generalized conclusions deduced by means of it [souligné par l'auteur] [Peacock, 1830, 108].

La référence aux opérations de l'esprit, issue de la philosophie de Locke, est cruciale pour appréhender la légitimité philosophique de cette relation entre algèbre arithmétique et algèbre symbolique, entre vérités contingentes et vérités nécessaires, et pour assumer la séparation radicale entre calcul symbolique et signification : ce calcul symbolique est l'expression des opérations de l'esprit, qui s'expriment en mathématiques par des lois de combinaison [Durand-Richard, 1990].

Les opérations de ce « langage du raisonnement symbolique » qu'est l'algèbre de Peacock sont définies par leurs lois de combinaison. Ce sont celles que Peacock parvient à formuler à partir de la pratique des opérations de l'arithmétique :

> Let us now enquire a little further into the assumptions which determine the symbolical character and relation of these fundamental operations.
> The operations called *addition* and *substraction* are denoted by the signs + and –
> They are the inverse of each other.
> In the concurrence of the signs + and –, in whatever manner used, if two like signs come together, whether + and +, or – and –, they are replaced by the sign +; and when two unlike signs come together, whether + and –, or – and +, they are replaced by the single sign –.
> When different operations are performed or indicated, it is indifferent in what order they succeed each other.
> The operations called *multiplication* and *division* are denoted by the signs x and ÷ , or more frequently by a conventional position of the quantities or symbols with respect to each other......
> The operations of multiplication and division are the inverse of each other.
> In the concurrence or the sign + and – in multiplication or division, if two signs come together, whether + and +, or – and –, they are replaced by the single sign +; and if two unlike signs come together, whether + and -, or – and +, they are replaced by the single sign –.
> When different operations succeed each other, it is **not** indifferent in what order they are taken [Peacock, 1833, 196-197].

Le travail de Peacock pour légitimer les analogies opératoires auront des prolongements importants. Si ses successeurs renonceront au principe de permanence énoncé sous cette forme, Gregory le transformera en un principe général, bientôt utilisé par Boole, qui permettra de transférer toute conséquence opératoire entre classes de fonctions soumises aux mêmes lois opératoires, dès lors qu'elle aura été établie pour une de ces classes [Durand-Richard, 2008].

Du point de vue de l'analyse algébrique qui est le leur, cet ancrage sur l'importance accordée par Laplace aux fonctions génératrices comme outil majeur de la théorie des probabilités apporte un nouvel éclairage sur la place centrale qu'occupe le formalisme des séries dans les travaux des acteurs de ce réseau, de Peacock à Boole, en passant par De Morgan. Il est notoire que, dans un premier temps, ces algébristes se démarquent radicalement. de la bifurcation qu'impose A. L. Cauchy (1789-1857) entre algèbre et analyse, lorsqu'en 1821, dans son *Cours d'analyse algébrique,* il fonde l'analyse des fonctions sur l'étude de la continuité, et donc sur la notion de limite. Cette bifurcation en commande une seconde, entre séries convergentes et séries divergentes. Peacock, au nom de la généralité de la science, refuse délibérément ce retour à la multiplicité des cas. Et De Morgan, qui pourtant rédige son *Treatise of Differential Calculus* (1836-1842) en faisant place aux conceptions de Cauchy, produit plusieurs articles où il reconnaît le schisme existant entre les mathématiciens à ce sujet, tout en contestant le « rejet dogmatique des analystes étrangers » à l'égard des séries divergentes [De Morgan, 1849, 197]. Il cherche au contraire, à partir d'études de cas, à montrer comment préserver la permanence du formalisme en dépit de la discontinuité des valeurs numériques ou de la divergence des séries, même si « les équivalences de l'analyse générale ne s'expriment pas toujours facilement » [De Morgan, 1838b]. En dépit des difficultés soulevées par ces séries, De Morgan persiste à en faire un objet d'études, en raison même de la fidélité affirmée de ces algébristes aux méthodes d'invention eu égard aux perspectives qu'elles offrent pour l'avenir. Il s'agit de préserver l'ouverture qu'offrent les pratiques empiristes, et de ne pas s'enfermer dans une conception strictement axiomatico-déductive :

> We must admit that many series are such as we cannot at present safely use, except as means of discovery, the results of which are to be subsequently verified. ..
> But **to say that what we cannot use no others ever can, to refuse that faith in the future prospects of algebra which has already realised so brilliant a harvest,** and to train the future promoter of analysis in a notion which will necessarily prevent him from turning his steps to quarters from whence his predecessors have never returned empty-handed, seems to me a departure from all rules of prudence. The motto which I should adopt against a course which seems to me a departure from all rules of prudence. The discovery would be contained in a word and a symbol – remember $\sqrt{-1}$ [souligné par l'auteur] De Morgan, 1849, 183].

Si le formalisme des séries conserve pour ces algébristes son caractère fondamental, n'est-ce-pas précisément en raison de l'articulation qu'elles assurent entre les différents registres rencontrés dans les travaux de ces algébristes. Elles donnent un développement infini des fonctions, et permettent d'envisager les polynômes comme cas particulier de ce type de développement. Elles interviennent dans la recherche d'intégrales définies. Et surtout, elles sont au cœur de la définition des fonctions génératrices, puisque la fonction génératrice d'une fonction donnée est déterminée à partir d'un développement en série – qu'on dit aujourd'hui formelle – dont les coefficients ne sont autres que les valeurs numériques de la fonction donnée, et, dans le cas présent, les valeurs successives de la probabilité. Qui plus est, les fonctions génératrices sont susceptibles elles aussi de lois opératoires. Le caractère unificateur de ce cadre méthodologique est flagrant, et les algébristes anglais sont à la recherche des fondements théoriques de cet édifice, fondé sur la généralisation du caractère algorithmique des notations algébriques, initialement développées pour les nombres, et successivement étendues à d'autres entités.

Pourtant, si les recherches de ces algébristes portent effectivement sur la caractère formel de l'algèbre, tous les problèmes dont proviennent les exemples traités, comme le relève De Morgan, sont issus de la physique mathématique. Le programme laplacien et ses développements récents, par exemple dans les travaux de Poisson, souvent cités par Peacock, De Morgan et Boole, reste l'horizon de la recherche de ces algébristes. Au delà de la réflexion menée sur le caractère formel des méthodes, la *Théorie analytique des probabilités* va permettre aux successeurs de Peacock de mieux articuler les relations entre connaissance certaine et connaissance expérimentale. Dans la version révisée en français de son article de 1830 dans *The Edinburgh Review,* Herschel célèbre « l'élégance et la force » de la *Théorie Analytique*, « l'extension de ses formules, les applications nombreuses et importantes de ses principes », et poursuit :

> Le grand ouvrage de Laplace est considéré à juste titre comme prééminent. (…) Il marque le *nec plus ultra* du talent et de la puissance mathématique. Cet ouvrage sublîme fut considéré comme embrassant d'une manière si complète le sujet dans toute son étendue et répondant si bien à tous les besoins du théoricien, qu'il

> s'écoula un quart de siècle (…) avant qu'il parût quelque chose d'important sur la théorie des probabilités[8] [Herschel, 1860, 17].

Il n'empêche que du strict point de vue de l'analyse mathématique, le style de Laplace est suffisamment elliptique pour que les algébristes anglais aient été confrontés à la nécessité d'approfondir les principes susceptibles de légitimer ses méthodes. Comme l'écrit De Morgan : « *The genius of Laplace was a perfect sledge hammer in bursting purely mathematical obstacles; but, like that useful instrument, it gave neither finish nor beauty to the results. In truth, in truism if the reader please, Laplace was neither Lagrange nor Euler* » [De Morgan, 1837b, 244]. Et le programme de recherche défini par Babbage en 1813 et poursuivi par ce réseau s'inscrit directement dans l'incomplétude du travail de Laplace, afin d'établir l'algèbre comme science tout en préservant son caractère inventif.

III : DE MORGAN : LA FONCTION REGULATRICE DE LA THEORIE DES PROBABILITIES

Au premier regard, il peut paraître étonnant que la réception de la *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace ait eu lieu en deux temps, et selon des problématiques bien distinctes. Elle s'est d'abord attachée à l'analyse des méthodes de Laplace, cherchant à fonder les modes de raisonnement par une théorie générale de l'algèbre. Ce faisant, elle a initié un domaine de recherche, le calcul des opérations, qui s'est poursuivi au moins sur les cinquante premières années du 19ème siècle. Quant à la réception des contenus de ce « Mont Blanc de l'analyse mathématique » [De Morgan, 1837b, 244], elle n'a lieu que dans les années 1830, à partir des nombreux articles que lui consacre De Morgan, et concerne cette fois, non pas la recherche, mais la diffusion de ces contenus. La variété des publics visés est à la mesure du champ des savoirs qu'embrasse la théorie de Laplace. La lecture de De Morgan donne des éléments de réponse sur ce décalage entre la réception des méthodes et la réception des contenus du travail de Laplace sur les probabilités. En 1837, son compte-rendu de l'édition de 1820 de la *Théorie Analytique* est lui-même livré en deux parties, l'une consacrée aux méthodes, et l'autre aux contenus. Il souligne le fait que Laplace applique très peu le calcul des fonctions génératrices aux différents exemples qu'il traite dans son ouvrage[9]. La liaison entre méthodes et contenus ne s'impose donc pas au lecteur de Laplace, et la structure même du compte-rendu reproduit cet écart. Par contre, De Morgan recommande à l'étudiant et au « *mathematical investigator* » de se détourner des traités élementaires pour leur préférer ce style d'ouvrage, excellent outil d'initiation à la recherche. D'après lui, Laplace reprend parfois presque mot pout mot le contenu de certains de ses précédents mémoires, de telle sorte qu'il reste très proche de ses « sources d'invention », laissant apparaître à la fois la richesse des développements nouveaux et les points qui restent à clarifier. Ainsi, « *A student is more likely* pro ingenio suo*, to be able to imitate Laplace by reading Laplace, than Lagrange by Lagrange, or Euler by Euler* » [De Morgan, 1837b, 247] ! De Morgan s'inscrit là dans la lignée des algébristes anglais, revendiquée depuis 1813 : expliciter le caractère

---

[8] Herschel se réfère ici aux *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837) de Simeon-Denis Poisson (1781-1840).

[9] Dans « A Treatise on the Theory of Probablities » de 1837, De Morgan s'appliquera d'ailleurs à corriger ce défaut, en multipliant les exemples de problèmes traités par les fonctions génératrices.

symbolique des lois opératoires sans se couper des méthodes d'invention. Une méthodologie chère aussi bien à Bacon qu'à Locke.

Autre facteur essentiel pour comprendre cette réception en deux temps de la *Théorie Analytique des Probabilités* : les années 1830 marquent un moment de stabilisation de la Révolution Industrielle. Lorsque Babbage, Herschel et Peacock ont lancé *The Analytical Society* en 1813, ils étaient très inquiets, à juste titre, du fossé qui s'était creusé entre la situation des universités anglicanes et les nouvelles formes de savoir issues des nouveaux centres de pouvoir [Durand-Richard, 1996]. Lorsque De Morgan écrit, la situation a considérablement évolué. Des réformes institutionnelles ont lieu, en particulier la Réforme électorale de 1832, et l'arrivée au pouvoir de la reine Victoria (1837) laisse espérer que la situation socio-politique va continuer à se stabiliser. Ceci dit, les effets et les valeurs de la Révolution Industrielle sont plus présents que jamais. Il y a lieu de s'adresser, non seulement aux érudits, mais aussi aux nouvelles classes montantes, avec la conviction que la connaissance apportera davantage de régulation et de sagesse dans les nouveaux échanges économiques. Et les contenus de la *Théorie Analytique des Probabilités* permet de faire face à cette double exigence.

1. De Morgan, mathématicien et actuaire

En tant que membre éminent du réseau des algébristes anglais, De Morgan partage leur ancrage philosophique et participe activement au mouvement de réforme par son engagement pédagogique. Mais il mène aussi des activités qui échappent trop souvent à l'historiographie. Formé au Trinity College de Cambridge, avec Peacock comme tuteur en algèbre, De Morgan est devenu le premier professeur de mathématiques de la nouvelle université de Londres, dans son unique Collège fondé en 1828, le collège « sans Dieu »[10]. Cet unitariste peu orthodoxe, qui se définit lui-même comme un « *unattached christian* », enseignera toute sa vie dans ce collège, dont il démissionnera pourtant deux fois, déjà en 1831 pour une question de principe, et en 1866 parce que le collège avait failli à son engagement originel de neutralité. Il avait d'ailleurs quitté Cambridge sans obtenir de distinction – *the Honors* – pour avoir refusé de jurer fidélité à l'Eglise anglicane. Auteur prolifique, pédagogue avant tout, De Morgan revendique la sécularisation de l'enseignement universitaire, qui ne s'imposera à Cambridge et Oxford que partiellement dans les années 1850, et totalement en 1871. Son discours inaugural à l'université de Londres en 1828 est une véritable panégyrique de la philosophie de Locke appliquée aux mathématiques [De Morgan, 1828]. il s'interroge en permanence sur les relations entre « théorie et pratique », entre « observation et expérience », au point de leur consacrer de très longues entrées dans le *Penny Cyclopaedia.*

Au delà du rôle qu'elle a joué dans le développement de méthodes symboliques spécifiques tendant à justifier l'analogie et l'induction, la diffusion de la *Théorie Analytique des Probabilités* acquiert dans les travaux de De Morgan une dimension politique et sociale considérable. Elle entre très directement en contact avec une société préoccupée depuis longtemps par les problèmes d'assurances, à la fois pour les banques et pour le commerce maritime, qui a vu naître les premières études sur les tables de mortalité. Dès son compte-rendu de 1837, De Morgan s'adresse à la fois aux mathématiciens, aux classes gouvernantes, et aux actuaires, auxquels il affirme

[10] Cette neutralité religieuse permet aux étudiants de toute obédience, notamment juifs ou catholiques, de s'inscrire à l'université de Londres, alors qu'ils ne pouvaient être admis dans les universités anglicanes de Cambridge et d'Oxford.

« délibérément et positivement » l'urgence d'une assimilation de ses contenus, face à un lectorat qui ne semble pas convaincu d'avance :

> Worse understood than any of the applications of mathematics, a science has been growing for a century and a half, which must end by playing an even more important part in the adjustment of social relations, than astronomy in international communication. We make this assertion most deliberately and most positively, to be controverted by some who are at least as well able to judge as ourselves, to be looked upon with derision by others, and with doubt by most educated men. If the public mind has not yet been made to feel that the preceding prophecy is actually in process of fulfilment, it is because one primary agent has not yet been awakened to a sense of the importance of his share of the work. The mathematician has done his part, and a more difficult task he never had; the statesman is only just awakened to so much as a disposition to accumulate some of the data which are necessary. We speak especially of England, and by the English statesman we now begin to understand all the monied and educated part of the English public [de Morgan, 1837b, 237].

L'article va bien au-delà du simple compte-rendu. Il commence par une dénonciation sévère de l'ignorance dans laquelle se trouve aussi bien le pouvoir législatif que la société civile dans la gestion des affaires politiques et sociales. Cette critique relève d'une philosophie utilitariste, pour laquelle les institutions se doivent d'assurer le bonheur du plus grand nombre. Dans ses différentes publications, c'est en tant qu'expert que De Morgan s'emploie à établir que les probabilités rendent compte de toutes les démarches du raisonnement, et que leur étude permet de rationaliser et de moraliser l'ensemble des actions humaines qui engagent la collectivité. Car bien que ce soit trop souvent négligé, De Morgan n'est pas seulement professeur de mathématiques. Il est aussi, depuis 1828, membre de la *Royal Astronomical Society*, dont plusieurs membres fondateurs, venus des milieux bancaires, importeront les pratiques de calcul de l'actuariat à l'astronomie [Ashworth, 1994]. Mais surtout, à cette époque où l'activité actuariale, encore très peu professionnalisée, commence à acquérir un statut [De Morgan, 1836-43, « actuary »], De Morgan devient lui-même actuaire dès sa première démission de l'université de Londres[11]. Sollicité par de nombreuses sociétés d'assurances, il acquiert une notoriété indiscutable, et exercera ses talents jusqu'en 1867 où il conduira les calculs de la *Life Alliance Insurance Company* [Rice, 1997, 99]. Il s'exprime donc à la fois en tant que mathématicien et praticien lorsqu'il souligne qu'avec le développement des firmes, des capitaux énormes sont engagés, dont le régime d'assurance exige fiabilité. Là où Babbage encourageait le gouvernement à s'appuyer sur les sciences les plus sévères pour qu'elles contribuent à réguler le développement industriel [Durand-Richard, 2011], De Morgan incite plus largement les hommes de pouvoir à se former aux probabilités afin que l'organisation de la chose publique soit structurée par la connaissance.

2. L'unification des modes de connaître

Le premier souci de De Morgan est de convaincre ses condisciples de la nature philosophique et scientifique des probabilités, en prenant soin de ne pas se couper de la signification usuelle, essentiellement subjective, du mot « probable ». Sa méthodologie reste celle des algébristes de la première génération. Parce qu'elle est d'abord subjective, la probabilité relève de ce qui se passe dans l'esprit, et non dans la nature, ou dans les événements eux-mêmes. Parce qu'elle peut différer d'une personne à l'autre, selon l'état des connaissances préalables de chacune, « *probability does not apply to any thing in the event itself, but to a* ***state of mind*** *by its*

[11] Il en sera secrétaire à plusieurs reprises.

contemplation » [De Morgan, 1837a, 393]. Distinction qu'il reprend en 1838, pour en signifier immédiatement l'implication morale : l'intolérance, chez une personne sincère, provient précisément de son incapacité à percevoir cet écart entre la nature et l'expérience de la nature [De Morgan, 1838a, 8].

Partant de cette expérience, De Morgan se livre à une analyse minutieuse des critères nécessaires pour objectiver la notion de probabilité, à faire de la probabilité une grandeur mesurable, et susceptible d'opérations. Ces critères permettront d'établir les axiomes de la théorie[12]. De Morgan n'envisage pas ces axiomes comme donnés *a priori*, mais au contraire comme issus d'une réflexion sur l'expérience, puisque les mathématiques ne sont, selon la conception de Locke, que des raccourcis de la pensée, des « abréviations de longs processus opératoires » [De Morgan, 1837a, 393 ; 1838a, 13].

Cette exigeante recherche des principes répond à une seconde exigence de De Morgan, qui concerne cette fois l'enseignement des probabilités. Cet enseignement n'a manifestement pas lieu dans les universités, mais dans des écoles spécialisées, qui ne forment que des techniciens du calcul, et négligent de préparer les acteurs à penser leur objet. Pour De Morgan, seule la maîtrise des principes et des méthodes est porteuse d'invention. Pour mieux susciter l'intérêt de ses condisciples, De Morgan ne craint pas de mobiliser un argument faussement nationaliste, affirmant que ces méthodes ont déjà été dégagées en Angleterre par A. de Moivre (1667-1754). Comme le faisait Babbage en 1813, il les incite à réimporter ces idées nées sur place, mais développées sur le Continent :

> It was then very much the fashion, particularly in England, to publish results and conceal methods ; by which we are left without the knowledge of the steps which led De Moivre to several of his most brilliant results. **These however exist, and when we look at the intricate analysis by which Laplace obtained the same, we feel that we have lost some important links in the chain of the history of discovery** [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1838a, vii]

Les méthodes de Laplace ont converti la doctrine des chances, l'étude des jeux de hasard, en un corpus théorique, celui des probabilités. Et l'enjeu qui s'affiche dans les deux principaux articles de De Morgan sur le sujet, y compris dans l'ordre des publications, est de convaincre les mathématiciens de s'emparer de ce savoir utile, de développer les bons outils théoriques pour les mettre au service des actuaires et de garantir ainsi la légitimité théorique de leurs pratiques. Il ne s'agit pas d'exiger de tous le même niveau de maîtrise de la théorie, mais d'en adapter l'exercice aux besoins de chacun, selon le principe de la division du travail dont Babbage a déjà vanté les vertus à la *Royal Astronomical Society* et dans sa réflexion sur les machines, aussi bien pour le travail mental que pour le travail manuel [Babbage, 1832].

De Morgan vise cette fois le cursus des études à l'Université de Londres, fondée avec une approche benthamiste par un groupe de libéraux et radicaux, sous l'impulsion du parlementaire whig Sir H. R. Brougham (1778-1868). La théorie des probabilités appliquée au calcul des annuités fait partie de son programme initial d'enseignement pour la « *Senior Class* » [Rice, 1997, 76]. Elle figure dans ses cahiers de préparation de cours des années 1840, de la théorie des

[12] De manière tout à fait étonnante, se trouve déjà chez De Morgan cette même méthodologie scrupuleuse, construisant pas à pas son objet à partir de l'expérience et des exigences de la mathématisation, que j'ai pour ma part rencontrée pour la première fois chez Claude E. Shannon (1916-2001) lorsqu'il se livre au même type d'enquête pour faire de la « quantité d'information » une grandeur mesurable, et fonder la théorie de l'information [Shannon, 1948].

permutations à celle des fonctions génératrices, en passant par l'étude des probabilités inverses[13]. Dans son enseignement comme dans ses articles, De Morgan valorise d'abord les principes, la qualité plutôt que la quantité, d'autant plus que les étudiants de l'Université de Londres sont dans l'ensemble moins studieux et moins brillants que ceux de Cambridge – en tous cas ceux de Cambridge qui obtiennent les *Honors*. De retour à l'université en 1836, après son entrée dans le monde de l'actuariat, De Morgan s'emploie à démontrer que l'utilité peut rimer avec les principes. Ce sujet, conjuguant besoins pratiques et rigueur théorique, n'est-il pas idéal pour voir converger les attentes des étudiants et les ambitions de l'université :

> In spite of the variety of subjects which are crowding upon each other in the daily business of our elementary schools, **a low standard of utility is gaining ground with the increase of the quantity of instruction, which deteriorates its quality.** All information begins to be tested by its *professional* value; and the knowledge which is to open the mind of fourteen years old is decided upon **by its fitness to manure the money-tree**.
> Such being the case, it is well when any subject can be found which, while **it bears at once upon questions of business**, admits, at the same time, **the application of strict reasoning**; and by its close relation to knowledge of a more wide and liberal character, invites the student to pursue from curiosity a path not very remote from that which he entered from duty or necessity. **Such a subject is the theory of life annuities, which** while it will attract many from its commercial utility, can hardly fail to be the gate through which **some will find their way to the general theory of probabilities** [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1838a, xiii-xiv].

Quant aux actuaires, De Morgan s'attaque de front au manque de fiabilité de leurs méthodes. Toute la première partie de son compte-rendu de Laplace leur est de fait consacrée. Leur profession vient d'être officiellement légalisée, sans que leur compétence soit clairement définie [De Morgan, 1836-43, « actuary »]. Il reprend donc pour eux l'histoire de la théorie des probabilités, jusqu'à ce qu'il salue comme son aboutissement, l'étude des probabilités inverses, aujourd'hui connue soue le nom de théorème de Bayes, mais dont De Morgan rapporte l'origine à à Roger Cotes, et la démonstration au travail de Laplace. Toutes les applications présentées dans l'*Essay* de 1838 – gains et pertes (ch. V), erreurs d'observation (ch. VII), assurances sur la vie (ch. VIII), rentes viagères (ch. IX)] – sont ainsi traitées à partir de la table établie par Christian Kramp (1760-1826) dans son *Traité des Réfractions Astronomiques,* et que De Morgan reproduit à la fin de l'ouvrage, détaillant son utilisation par interpolation au chapitre IV. Il insiste sur la mise en commun des connaissances que constitue la réalisation des tables en général [De Morgan, 1837a, 13]. La production des tables est ainsi produite à partir d'un travail théorique reconnu, et offre aux praticiens une grande simplicité :

> To understand the demonstration of the method of Laplace would require considerable mathematical knowledge ; but **the manner of using its results** may be described to a person who possesses no more than a common acquaintance with decimal fractions. **To reduce this method to rules, by which such an arithmetician may have the use of it, has been one of my primary objects in writing this treatise.** I am not aware that such an attempt has yet been made.
> **To this table I shall have continual occasion to refer : into it, in fact, is condensed almost the whole use I shall have to make of the higher mathematics** [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1838a, viii-16]

[13] De Morgan, Manuscripts, University of London, Ms 775/ 1-324, n° 52 du 12 janv. 1848, n° 94 du 9 déc. 1848, et n° 131 du 2 juin 1849.

De Morgan ne se contente pas de former les praticiens à cet usage des tables. S'il n'est pas possible d'expliquer le principe de la méthode au lecteur ne disposant pas d'une connaissance mathématique suffisante, De Morgan veut malgré tout l'aider à appréhender la situation. Il esquisse, sans doute pour la première fois, une portion de la courbe dont la table donne l'aire en différents points d'abscisses données, et compare cette situation à celle des logarithmes [De Morgan, 1837a, 18]. Et surtout, il donne de nombreuses approches du dessin de cette courbe – ultérieurement dénommée « courbe de Gauss » – dans son chapitre « On Errors of Observtn, and Risks of Mistake » cansacré à la théorie des erreurs, dont il cherche à donner une approche empiriste au lecteur, obtenant le tracé à partir de considérations pratiques sur la distribution générale des erreurs.

3. Les probabilités comme socle moral de la vie publique

L'argumentaire de De Morgan visant à emporter l'adhésion de ses contemporains en faveur de ce nouveau mode de rationalité procède en deux temps. Formé aux *disputationes* de Cambridge, il sait s'opposer à tous les dénigrements dont les probabilités sont l'objet : elles ne seraient pas un savoir pratique, elles favoriseraient le jeu, et elles seraient anti-religieuses. L'analyse probabiliste du système solaire est ici reprise pour montrer que « *the existence of something which combines together different and independent arrangements to produce an end which could not*, ceteris manentibus*, be produced without them, must be added to the notion of a Providence, intelligent or not* ». Cette question est cependant distincte de celle de l'existence d'un Etre Suprême, que De Morgan considère comme une question historique [De Morgan, 1838, 28-29].

Dans un second temps, De Morgan tire en quelque sorte la leçon des calculs pour chacune des applications de la théorie des probabilités. ce que De Morgan affirme à plusieurs niveaux. Pour chaque catégorie de lecteur concerné, il explique en quoi la théorie des probabilités permet de soutenir un choix rationnel, ou de contrôler la rationalité des possibilités qui lui sont offertes. Au plan personnel, il sait que le jeu est une passion des classes aisées en général, et en Grande-Bretagne en particulier. Il connaît les cercles de jeux, aussi bien à Londres qu'au Palais Royal à Paris [De Morgan, 1838, 102]. Il affirme à ce sujet que « *The tendency of our study is to substitue the satisfaction of mental exercise for the pernicious enjoyment of any immoral stimulus* » [De Morgan, 1838a, 19]. Mais surtout, il répète à plusieurs reprises que ces exemples sur les paris sont donnés en raison de leur simplicité, pour illustrer en fait d'autres situations structurellement identiques. Le joueur est alors volontiers comparé à l'agioteur de Stock Exchange. Par exemple :

> And though I have hitherto appeared to speak only of games of chance, yet precisely **the same considerations apply to mercantile speculations**, and to every species of affair in which no absolute certainty exists [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1838a, 95]

Plutôt qu'un travail de modélisation, ces exemples donc interviennent à des fins méthodologiques, dans le cadre de la démarche empiriste des algébristes anglais. Ils représentent les expériences à partir desquelles il est possible d'introduire et faire comprendre, par analogie, ce qui se passe à plus grande échelle pour les banques ou les compagnies d'assurances [De Morgan, 1838a], et aussi bien, d'écrire algébriquement, en passant des nombres aux lettres, les formules mathématiques de la théorie des probabilités [de Morgan, 1837a]. Constatant que les compagnies d'assurance prolifèrent au fur et à mesure que les firmes prennent de l'ampleur, il met en garde le public potentiel contre toute propagande abusive. Mieux vaut se fier au mode de calcul des primes d'assurance que de croire les beaux discours de lancement, si tentants soient-ils. Seule la rationalité du montage technique de l'entreprise garantit un remboursement adéquat :

> **The theory of insurance, with its kindred science of annuities, deserves the attention of the academical bodies**. (…) It is of great importance at the present moment that sound principles on the subject of insurance should be widely and rapidly disseminated. Within the last twenty years, many new institutions have been founded; (…) [with] the magnificent style [of their] prospectuses…..
> Public ignorance of the principles of insurance is the thing to which these advertisements appeal: when it shall come to be clearly understood that in every office some must pay more than they receive, in order that others may receive more than they pay, such attempts to persuade the public of a certainty of universal profit will entirely cease [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1838a, xv-xvi]

Face aux désordres engendrés par la Révolution Industrielle, qui inquiète tant le mouvement réformateur, la maîtrise de la théorie des probabilités peut de surcroît contribuer au rééquilibrage et à la moralisation de la vie publique. Tout comme Babbage dans les mêmes années, De Morgan prône à la fois l'auto-régulation de la vie publique, en améliorant le niveau d'éducation des individus, et l'intervention du gouvernement. L'expérience menée par G.-L. Buffon (1707-1788) à propos du paradoxe de Saint-Pétersbourg, ainsi que les débats entre Condorcet et D'Alembert sur le sujet, lui servent à mettre en évidence les enjeux qui se nouent autour de l'espérance mathématique infinie, à savoir que « *the mathematical advaantage is in favour of the insurance offices, which are sure to gain in the long run* », tout comme il l'est pour la « banque » des maisons de jeux, et pour le joueur professionnel. Il est donc indispensable que le public soit informé du fait que le système de régulation de ces situations relève des mêmes principes, fondés sur l'approximation de Stirling :

> The sum risked must be only such a proportion of the possible gain as the mathematical probability of gaining it is of unity (…) the percentage of fluctuation for which there is a given chance, varies inversely as the square root of the whole number of trials [De Morgan, 1838, 93-95].

C'est la raison essentielle pour laquelle les compagnies et les banques, disposant de capitaux considérables, et travaillant sur le long terme, peuvent garantir leurs investissements. Les situations qu'aborde De Morgan concernent essentiellement la gestion du capital, et marquent donc un changement d'échelle considérable par rapport aux problèmes de paris. Quelle que soit la prudence des individus face au capital, les échanges, étant régis par ces principes, ne peuvent aboutir qu'à la concentration de ce capital, et à l'accentuation des inégalités sociales. Pour un réformateur tel que De Morgan, soucieux, comme ses condisciples algébristes, de préserver l'harmonie politique et sociale, cette évolution ne peut que conduire à de graves déséquilibres, que seule l'intervention d'un gouvernement avisé est susceptible d'éviter :

> **It is the nature of free trade that whatever mathematical advantage can be gained at all, is more accessible to the rich speculator than to the poor one**. **Consequently, the richer player, for that reason, can make himself the stronger player**. (…) **A wise government would throw the burden of taxation more upon the rich and less upon the poor**. **The mathematical advantage of wealth would be taxed, as well as its power of procuring luxuries**. **Such a result never can be expected until the public mind is better informed upon the subject of which this work treats** [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1848, 112].

Ces écrits de De Morgan marquent ainsi la convergence de son savoir académique et de son expérience d'actuaire. Il se livre à un travail pédagogique considérable, marqué par la méthodologie des algébristes anglais. Là où la *Théorie analytique des probabilités* était « by very much the most difficult mathematical work we have ever met with » [De Morgan, 1837a, 418], De Morgan procède à partir de l'expérience, par ordre de difficulté croissante, afin de mettre cette théorie à la portée du lecteur, qu'il soit un professionnel ou une personne déjà initiée aux mathématiques. En particulier, dans son article de *l'Encyclopædia Metropolitana,* il ne saurait être question pour De Morgan de commencer son travail par les fonctions génératrices, qui sont introduite pas à pas dans le corps de l'article.*public* , es articles introdsont pas seulementLa méthodologie propre à

S'il est concerné par la mise en place de réformes assurant l'équilibre politique et social dans les champs d'exercice des savoirs qu'il pratique, il reste avant tout un mathématicien londonien [Rice, 1996]. Comme le souligne à juste titre A. Rice, lorsque Babbage crée la *Statistical Society* au sein de la *British Association for the Advancement of Science* en 1834, De Morgan n'en fera pas partie, pas plus qu'il ne s'impliquera dans l'organisation de *British Association*. Mais ses articles des années 1830 ont été déterminants pour l'assimilation des contenus de la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace dans la gestion du capital, aussi bien dans le monde des assurances que dans le monde des banques [Rice, 2003].

IV. VERS UNE APPROCHE LOGIQUE DES PROBABILITES

Ni la question des méthodes, ni les préoccupations relatives aux fondements de l'algèbre, ne sont évacuées pour autant. Au contraire, au cours des décennies suivantes, De Morgan et Boole vont tenter de reconsidérer les probabilités à la lumière de leurs propres recherches, l'un sur la logique, l'autre sur la logique du calcul symbolique. Ces deux auteurs entretiennent d'ailleurs une correspondance régulière depuis 1842, en particulier sur le calcul des opérations [Smith, 1982]. C'est dire que les méthodes impliquées dans la *Théorie analytique des probabilités,* notamment les réflexions sur l'analogie, reprennent ici une importance cruciale pour investir un nouveau champ de recherche, la reformulation logique des probabilités.

1. Une inspiration pour l'algébrisation de la logique

Dès 1847, contestant l'approche purement empiriste de la logique de John Stuart Mill (1806-73), Boole revendique l'approche symbolique pour se démarquer d'un empirisme qui envisage l'algèbre comme un simple système de notations, réduisant les méthodes analytiques à un calcul mécanique, susceptible de s'exercer indépendamment de toute réflexion [Boole, 1847, 3]. En 1854, il annonce d'emblée son ambition philosophique : « étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit », en se réclamant explicitement de Bacon et de Locke. Dans cette perspective, Boole n'est pas seulement concerné par l'analyse du raisonnement certain – le raisonnement déductif –, mais par celle du raisonnement probable, comme l'annonce l'intégralité de son titre : *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*. C'est fort de sa conviction que « l'esprit est lui-même le siège de lois qui opèrent d'une façon aussi manifeste et concluante dans les formules particulières que dans les générales » [Boole, 1854, 40], qu'il se livre à la symbolisation de ce fonctionnement opératoire de la pensée, selon un mode combinatoire allant du simple au composé, et qu'il va repérer en parallèle, au chapitre II dans la structuration du langage, et au chapitre III dans ce qu'il envisage comme l'opération mentale de sélection de classes d'objets. Boole va donc successivement établir que :

> La combinaison xy représente la classe des choses auxquelles peuvent simultanément s'appliquer les noms ou descriptions représentés par x et y. Ainsi si x seulement remplace « choses blanches » et y « moutons », posons que xy représente « moutons blancs »….
> L'ordre dans lequel deux symboles sont écrits est indifférent… Dès lors, nous avons :
> $$xy = yx \qquad (1)$$
> [Pour deux] classes tout à fait distinctes, de sorte qu'aucun élément de l'une ne soit élément de l'autre, l'expression « hommes et femmes » est équivalente… à l'expression « femmes et hommes »…. nous avons alors :
> $$x + y = y + x \qquad (2)$$
> Soit z le symbole représentant l'adjectif « européen » ; alors, comme il revient en fait au même de dire « les européens hommes et femmes » et « les hommes européens et les femmes européennes », nous avons :
> $$z(x + y) = zx + zy \qquad (3)$$
> [Boole, 1854, 40].

Cette analogie opératoire entre lois de l'algèbre et lois de la pensée va permettre à Boole, en s'appuyant sur le principe de transfert qu'il reprend de Gregory, d'écrire pour la logique toutes les conséquences algébriques de ces lois, d'intégrer la théorie du syllogisme dans cette algèbre de la logique, et d'étendre les déductions de la logique à un nombre quelconque de prémisses en utilisant la théorie algébrique de l'élimination. Tel que l'énonce Boole, ce « théorème de transfert » affirme en effet que « Si les opérations arithmétique et logique sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle » [Boole, 1854, 49].

Or cette analogie se trouve déjà mise en évidence par De Morgan dans son « Treatise on the Theory of Probabilities » de 1837, à propos de la façon dont on peut exprimer les différentes manières de combiner les objets. De Morgan souligne cette analogie au moment où il cherche à induire empiriquement le théorème de Bernoulli. Il écrit en effet :

> There is in algebraical multiplication a **ressemblance** to the sorting of all the events which can happen by combination of simple events, which is one of the most important principles in the application of mathematics to this subject (…) Write these two under one another
> (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd
> (a or b) (c or d) is either ac or ad or bc or bd
> The first is a well known algebraical truth : the second is a truth also. **The analogy which exixts between the two preceding processes directs us to the following theorem** [souligné par l'auteur] [De Morgan, 1837a, 398].

Il ne semble pas que cette antériorité ait déjà été soulignée. Si l'écriture algébrique que Boole propose pour la logique s'articule, d'un point de vue général, sur les opérations de l'esprit et la philosophie de Locke, la théorie des probabilités apparaît comme un cadre particulier où cette analogie a pu prendre corps, servant directement à Boole de ferment pour développer son propos, grâce au théorème de transfert de Gregory..

2. Boole et la logicisation des probabilités

La partie de l'*Investigation on the Laws of Thought* consacrée à la théorie des probabilités est la plupart du temps totalement ignorée, ne serait-ce qu'en raison du raccourci souvent imposé au titre de l'ouvrage. Elle occupe pourtant six chapitres, soit plus d'un tiers du volume, et donne toute la mesure du projet booléen. Charles S. Peirce (1839-1914), dès 1867, y verra le principal usage du calcul booléen [Diagne, 1989, 207]. Il s'agit, là encore et surtout, de fonder la supériorité de la théorie sur l'expérience en la fondant sur les lois des opérations de l'esprit[14]. Ce travail est loin d'être anecdotique ou marginal. Les références de Boole dans ces chapitres témoignent d'une connaissance approfondie des travaux de ses contemporains, essentiellement ceux de Condorcet, Laplace, Poisson, Quetelet et Cournot, ainsi que de l'intérêt spécifique des algébristes du courant symbolique pour la théorie des probabilités[15]. Sa problématique est toujours celle des algébristes anglais. Il part des résultats obtenus, donc de l'expérience acquise : il commence donc par spécifier l'état des connaissances (ch. 16), en marquant soigneusement, sur les traces de Poisson, la distinction entre « probabilité » et « mesure de probabilité », c'est-à-dire entre l'aspect philosophique et l'aspect calculatoire de la notion de « probabilité » :

> Poisson, dans ses Recherches sur la probabilité des jugements, a établi les définitions fondamentales de cette science :
> - la probabilité d'un événement est la raison que nous avons de croire qu'il a eu lieu, ou qu'il aura lieu,
> - la mesure de la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas favorables ou contraires et tous également possibles (également vraisemblables)…
> Notre espérance de l'événement variera selon la quantité d'information que nous possédons sur ces circonstances.
> La probabilité est une espérance fondée sur une connaissance partielle (…)
> Une connaissance parfaite de toutes les circonstances concernant l'occurrence d'un événement ferait de l'espérance une certitude [Boole, 1854, 241-242].

Cette conception, héritée de Laplace, permet à Boole d'envisager les probabilités comme branche de la logique, sans incompatibilité aucune avec l'affirmation lockéenne du caractère fatalement incomplet des connaissances humaines. Partant de ce double héritage, Boole se dégage cependant des pratiques de ses condisciples, qui consiste à construire une théorie des probabilités conditionnelles sur la probabilité d'événements indépendants. Il estime hasardeuse cette hypothèse des événements indépendants, car c'est bien souvent, dit-il, une spécificité qu'on ignore quand on aborde ces questions. C'est pourquoi il préférera la faire intervenir plus tard comme cas particulier. Cette réserve faite, il se livre à une analyse épistémologique explicite du fait que la « simplicité » attribuée aux événements ne concerne pas leur nature, mais seulement l'état de notre connaissance :

> Je remarquerai tout d'abord que la distinction entre événements simples et événements composés n'est pas fondée sur la nature des événements eux-mêmes, mais sur la manière dont ils se présentent à l'esprit et le

---

[14] C'est le titre du chapitre 17, qui structure la présentation des chapitres suivants, dans Boole, 1854.

[15] Les travaux cités sont : Laplace, P. S. de, 1814, *Théorie analytique des probabilités,* Paris, ; Poisson, S. D., *Recherches sur la probabilité des jugements,* Paris, ; Cournot, *Exposition de la Téorie. des Chances,* Paris ; ainsi que Condorcet ; et en Angleterre De Morgan, A., « A Treatise on the Tehory of Probabilities », *Encyclopædia. Metropolitana,* London, ; et Donkin, W. F., 1851, *Philosophical Magazine.* Ils concernent aussi bien les sciences physiques (évaluation des erreurs attachées à l'observation en astronomie) que les sciences sociales (probabilité des jugements) et l'épistémologie (analyse des relations de cause à effet).

> rapport sous lequel celui-ci les conçoit. …. L'usage prescriptif du langage, qui a assigné à des combinaisons particulières d'événements des noms uniques et déterminés, tout en laissant quantité d'autres combinaisons s'exprimer par des combinaisons correspondantes de termes ou de phrases, est essentiellement arbitraire [Boole, 1854, 252].

La « simplicité » à laquelle Boole s'attaque ici est donc d'ordre grammatical. Conformément à la perspective lockéenne, Boole préfère s'appuyer sur la combinaison des opérations, et donc, de ce fait, sur la considération d'événements quelconques, qu'il envisage comme composés d'événements simples. Il considère alors, de la même façon, les probabilités de ces événements composés comme combinaison des probabilités des événements simples qui les constituent. S'appuyant sur la méthode générale qu'il a élaborée dans les chapitres précédents, il décide :

> [de] substituer aux événements, les propositions qui affirment que ces événements se sont produits ou vont se produire ; et [de] considérer que l'élément de probabilité se rapporte à la vérité de ces propositions et non à l'occurrence des événements à propos desquels elles affirment quelque chose [Boole, 1854, 245].

Ce glissement subreptice des événements aux probabilités élude – au moins provisoirement – l'analyse de l'adéquation des unes aux autres. Pour l'heure, il lui permet de transférer aux probabilités toute la méthode qu'il a élaborée pour le calcul des propositions primaires, et déjà transférée aux propositions secondaires. Il redémontre donc les résultats de ses prédécesseurs dans le cadre de cette méthode, et dans l'ordre qu'elle implique. En particulier, l'indépendance des événements ne relève pas pour Boole des principes : elle ne saurait faire partie de la généralité de la méthode, car elle « ne repose pas sur [leur] simplicité », mais seulement sur l'état des connaissances, sur « le fait que les données ne fournissent aucune information concernant un lien ou une dépendance entre eux » [Boole, 1854, 253].

Conformément à la démarche symbolique, la question des données ne relève aucunement de la théorie des probabilités. Elle fait d'ailleurs l'objet d'un chapitre séparé, intitulé « Conditions statistiques ». Elle concerne le passage des observations statistiques d'un événement, à la détermination de sa probabilité, et suppose un passage à la limite. Elle relève donc du champ numérique –comme chez Peacock – et aucunement de la méthode générale, fondamentalement symbolique.

Le projet de Boole apparaît tout à fait clairement dans les chapitres 20 et 21 : « Problèmes concernant les relations de cause à effet » et « Application particulière de cette méthode générale à la question de la probabilité des jugements ». Boole veut substituer sa méthode générale au théorème de Bayes, qu'il ne nomme jamais[16], concernant la probabilité de causes, parce que précisément, ce théorème fait intervenir l'hypothèse de causes indépendantes les unes des autres : comme le souligne Boole depuis le début de son exposé, c'est là une donnée que nous ignorons dans la plupart des cas. Il insiste sur le fait que c'est une hypothèse particulièrement fallacieuse, et donc très peu fiable, en prenant l'exemple de l'élaboration d'un jugement entre les membres d'une assemblée ou d'une cour de justice :

> De ces considérations l'on peut dégager les faits et conclusions suivants :
> Premièrement, qu'à partir de la simple observation de cas d'accord et de désaccord entre les opinions d'un groupe humain quelconque, on ne peut déduire aucune conclusion, quantifiable de manière définie, quant à la probabilité de voir un membre de ce groupe avoir une opinion juste, ni quant à celle du pour et du contre dans les questions soumises à se réflexion.

[16] Boole s'inscrit directement dans la lignée des travaux de Laplace, et ne fait aucune référence à des travaux anglais en ce domaine, autres que ceux de ses contemporains directs, essentiellement De Morgan et Donkin.

> Deuxièmement, que ces conclusions se peuvent déduire en faisant plusieurs hypothèses différentes, par exemple :
> 1) en faisant l'hypothèse de l'indépendance absolue des jugements individuels,
> 2) en utilisant certaines variantes définies de cette hypothèse permises par les données,
> 3) en utilisant un principe différent de résolution, suggéré par l'apparition d'une communauté de forme des solutions obtenues grâce aux variations en question.
> Enfin : que s'il devait y avoir un doute concernant les résultats finals, il ne tiendrait pas à l'imperfection de la méthode qui s'accorde finalement à toutes les hypothèses mais à l'incertitude des hypothèses mêmes. [Boole, 1854, pp. 381-82]

Boole se méfie des décisions humaines, et cherche des garanties à leur justesse. Tout comme Babbage et De Morgan, la connaissance est explicitement proposée comme vecteur de régulation de la vie publique. Il a donc à cœur de proposer une méthode qui permette de situer explicitement à quel moment il est indispensable d'introduire des hypothèses supplémentaires avant de poursuivre la résolution d'un problème, ceci afin que chacune puisse en juger, voire puisse envisager d'autres hypothèses possibles.

L'ouvrage de Boole s'achève par une réflexion générale sur « la nature de la science et la constitution de l'intellect » » [Boole, 1854, ch. 22] qui témoigne de sa parfaite connaissance des enjeux auxquels sont soumises les mathématiques et leur enseignement. La référence aux lois de l'esprit y est invoquée une fois de plus pour garantir les nouvelles manipulations algébriques des risques d'un savoir profane ou d'une absence de pensée.

CONCLUSION

Ainsi, les algébristes anglais n'ont pas seulement introduit l'œuvre de Laplace en Angleterre. Ils ne l'ont pas seulement mis à la portée du lecteur anglais. Cette œuvre a profondément marqué les orientations de recherche de leur travail. Les contenus de la *Mécanique Céleste* ont déterminé leur recherche d'une méthode générale susceptible de légitimer l'induction et l'analogie auxquelles Laplace avait largement recours dans sa recherche de résolution d'équations différentielles. Les contenus de la *Théorie Analytique des Probabilités* ont permis de renforcer leur recherche d'une théorie unifiée du savoir, embrassant le vaste spectre de la connaissance certaine et de la connaissance probable. La démarche symboliste de ces algébristes apparaît ainsi comme volonté de structurer les méthodes de Laplace, afin de donner à l'algèbre le statut de science qui lui permettrait d'entrer de plein droit à l'université, et de constituer une véritable propédeutique pour les étudiants en mathématiques, se substituant à la géométrie euclidienne. Cette mutation que constitue l'introduction des méthodes analytiques en Angleterre s'opère néanmoins sans s'écarter de la philosophie naturelle de Newton, dont la *Mécanique Céleste* de Laplace constitue un si remarquable prolongement, sans rompre pour autant avec la théologie naturelle. Au sortir de la révolution Industrielle, cette recherche d'harmonie est essentielle tant sur le plan épistémologique que politique. La conception de l'algèbre comme étude des structures abstraites devra attendre l'éclatement des savoirs en disciplines strictement spécialisées. Mais ce syncrétisme de pensée a permis de mettre au premier plan la logique des opérations, aussi bien celle de l'algèbre que celle de la logique, qui pourront servir à leur tour de nouveau cadre de pensée pour les probabilités.

Références

Arbogast, L.F.A. (1800): *Du calcul des dérivations,* Strasbourg, Levrault Frères.

Ashworth, W.J (1994): The calculating eye : Baily, Herschel, Babbage and the business of astronomy, *The British Journal for the History of Science,* xxvii, 409-41.

Babbage, C. (1989): *The Works of Charles Babbage*, (ed.) M. Campbell-Kelly, London, William Pickering, 11 vols.
– id., Anonyme (1813): Preface,: *Memoirs of the Analytical Society,* Cambridge, 1813. Babbage,*Works*, 1, 37-92.
– id. (1815-16): An Essay towards the calculus of functions, *Philosophical Transactions.* 105, 389-423 et 106, 179-256, in *Works*, 1, 93-193.
– id. (1832): *On the Economy of Machinery and Manufactures*, London, in *Works*, 8.

Boole, G. (1847): *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Cambridge, McMillan, Barclay & McMillan.
- id., (1854): *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London, Walton & Maberley, traduction française de S. B. Diagne, *Les lois de la pensée,* Paris, Vrin, 1992.

Bourbaki, N. (1969): *Eléments d'histoire des mathématiques,* Paris, Hermann.

Cannon, W. F. (1960): *Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network,* Journal of British Studies, IV, n° 1, 65-88.

Corry, L. (2004): *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures,* Basel-Noston-Berlin, Birkhauser Verlag.

De Morgan, A. (1828): An Introductory Lecture delivered at the opening of the mathemmatical classes at the University of London, 5 nov. 1828, *De Morgan Manuscripts,* MS. ADD. 3, UCL. General Catalogue.
– (1833-43): « actuary », « annuity », « chance », « generating functions », « interest », « Laplace », « least squares (method of) », « mean », « mortality (law of), « observation and experiment », « probabilities (theory of) », « recurring series », « table », « theory and practice », *The Penny Cyclopaedia of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge,* London, Charles Knight, vols .2, 6, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 23, 24.
– id. (1836): Calculus of functions, *Encyclopaedia Metropolitana,* (eds) E. Smedley and H. J. Rose, Pure Sciences, 2, 305-392.
– id. (1836-42): *Differential and Integral Calculus,* London, Baldwin & Cradock.
– id. (1837a): A Treatise on the Theory of Probabilities, *Encyclopaedia Metropolitana,* (eds) E. Smedley and H. J. Rose, Pure Sciences, 2, 393-490.
– id. (1837b): Review of *Théorie Analytique des Probabilités* par M. Le Marquis de Laplace, 3ème edn, 1820, *Dublin Review,* 3, 237-248; 338-354.
– id. (1838a): An Essay on Probabilities, and on their application to Life Contingencies and Insurance Offices, *The Cabinet Cyclopaedia*, London, Longman.

– id. (1838b): Sketch of a method of Introducing Discontinuous Constants into the Arithmetical Expressions of Infinite Series, in cases where they admit of several Values, *Transactions of the Cambridhe Philosophical Society,* 6, 185-93.
– id., (1847): *Formal Logic, or the Calculus of Inference, necessary and probable,* London, Taylor and Walton.
– id., (1849): On diverging series, and various Points of Analysis connected with them, *Transactions of the Cambridhe Philosophical Society,* 8, Part II, 182-203.
– id. (1837-49): On the Foundations of Algebra, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*, 7, 173-87, 1837-32 ; 7, 287-100, 1837-42 ; 8, 138-142, 1844-49 ; 8, 241-254, 1844-49.
– id., De Morgan Manuscripts, *University of London,* Mss 775.

Diagne, S.B. (1989): *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Belin, Paris.

Durand-Richard, M.-J. (2013): Historiographie du calcul graphique, in (dir.) D. Tournès, *Histoire du calcul graphique et graphomécanique,* Paris, Editions Cassini, à paraître.
– id. (2011): Le regard français de Charles Babbage (1791-1871) sur le déclin de la science en Angleterre, *Documents pour l'histoire des techniques*, numéro thématique sur « Les techniques et la technologie entre la France et l'Angleterre XVIIe-XIXe siècles », (dir.) P. Bret et I. Gouzévitch et L. Perez, n° 19, 2ème sem. 2011, pp. 287-304.
– id. (2008): De l'algèbre symbolique à la théorie des modèles : structuration de l'analogie comme méthode démonstrative, in *historique* (ed.) M.-J. Durand-Richard, *Le statut de l'analogie dans la démarche scientifique, Perspective historique,* Paris, L'Harmattan, pp. 131-169.
– id. (1996): L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance, in (éds) Goldstein, C., Gray, J., Ritter, J., *L'Europe Mathematique - Mythes, histoires, identité. Mathematical Europe - Myth, History, Identity,* Paris, Eds M.S.H, 445-477.
– id. (1990): La Genèse de l'Algèbre Symbolique : Une Influence Possible de J. Locke, *Revue d'Histoire des Sciences*, XLIII, n° 2-3, 129-180.

Gillispie, C. C. (1997): *Pierre Simon de Laplace, 1749-1827 : A Life in Exact Science*, Princeton, Princeton University Press, with the collaboration of R. Fox and I. Grattan-Guinness.

Grattan-Guinness, I. (1992): Charles Babbage as an Algorithmic Thinker, *Annals of the History of Computing*, 14, 3, 34-48.

Hahn, R. (2004), *Le système du monde, Pierre Simon de Laplace, un itinéraire dans les sciences,* Paris, Gallimard, NRF.

Hamilton, W.R (1931-40-67): *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton,* Cambridge, Camb. Un. press, 3 vols. .
– id. (1837a): *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time,* Transactions of the Royal Irish Academy, 17, 203-422. *Mathematical Papers,* 3, 4-96.

Herschel, J. F. W. (1813): On Equations of Differences, and their application to the Determination of Functions from given Conditions, *Memors of the Analytical Society,* Cambridge, Deighton, 65-114.

– id. (1814): Considérations on various points of analysis, *Transactions of the Royal Society*, 104, 440-462.
– id. (1830): Sur la théorie des probabilités, et ses applications aux sciences physiques et sociales, *The Edinburgh Review*, in A. Quetelet, 1869, *Physique sociale ou Essai sur le développement des facultés de l'homme*, Bruxelles, Muccardi et Paris, Ballière et fils. 2 vols.
– id., Herschel correspondance, *Royal Society.*

Koppelmann, E. H. (1969): *Calculus of Operations : French Influence on the British Mathematics in the first half on the nineteenth century*, Ph. D. Diss., John Hopkins University.

Lacroix, S.F. 1816): *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus,* translated from the French by C. Babbage, J.F.W. Herschel, G. Peacock, with an Appendix and Notes. Cambridge , Deighton & sons. London, Law & Whittaker.

Lagrange, J.L. (1772): Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*. Berlin, 185-221. 1867-92, in Lagrange, *Œuvres complètes*, (éds) Serret J.A. & Darboux, G., 14 vols.,Paris, Gauthier-Villars, 3, 439-476.

Laplace, P. S. (1878-1912): *Œuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, 14 vols.
– id. (1774a): Mémoire sur la probabilité des causes par les événements, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, Savants Etrangers*, Année 1774, in *Œuvres,*.VIII, 1891, 27-68.
– id. (1774): Mémoire sur la théorie des suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards, *Savans Etrangers* 1774, n°6, p. 353-71, *Œuvres*, VIII, 1891, 5-26.
- id. (1776): Recherches 1° sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards, 2° sur le principe de la gravitation universelle, et sur les inégalités séculaires des planètes qui en découlent. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, Savants Etrangers*, Année 1776, 7, p. 37-232. *Œuvres*, VIII, 1891, 69-278.
– id. (1777): Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris,* in *Oeuvres,* IX, 1893, 313-80.
– id. (1799-1825), *Mécanique Céleste,* in *Œuvres*, I-V, 1878-82.
– id. (1812): *Théorie Analytique des Probabilités,* in *Oeuvres*. VII, 1886.

Lubbock, J. W. & Drinwater-Bethune, J. (1830), « On Probability », *Library of Useful Knowledge,* London, Baldwin and Cradock.

McMackin-Garland, M. (1980): *Cambridge before Darwin, The Ideal of a Liberal Education, 1800-1860*, Cambridge, Cambridge University Press.

Morrell, J. & Thackray, A. (1981): *Gentlemen of Science, Early Years of the British Association for the Advancement of Science*, Clarendon Press, Oxford.

Novy, L. (1973): *Origins of modern algebra*, Prague, Publishing house of the Czeckoslovak Academy of Sciences.
– id. (1968): *L'Ecole Algébrique Anglaise*, Revue de Synthèse, III° S., n°49-52, janv. déc. 1968, 211-222.

Paley, W. (1785): *Principles of Moral and Political Philosophy,* London.
– id. (1794): *A View on the Evidences of Christianity,* London, Faulder
– id. (1802), *Natural Theology,* London, Faulder.

Peacock, G. (1830): *A Treatise of Algebra,* Cambridge, 1830. Réed. 2 vol.,1842-45.
– id. (1833): A Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis, *Report of the third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, held in Cambridge, 3, 185-351.

Playfair, J. (1808): Review of Laplace's *Traité de Mécanique Céleste*, *Edinburgh Review*, 11, n° 22, 249-84, janv. 1808.

Poisson, S. D. (1837): *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités,* Paris, Bachelier.

Rice, A. C. (1996): Mathematics in the Metropolis : A Survey of Victorian London, *Historia Mathematica,* 23, 376-417.
– id. (1997): Augustus de Morgan and the development of university mathematics in London in the nineteenth centuy, *Ph. D. thesis,* Middlesex University.
– id. (2003): 'Everyboby makes errors' : The intersection of De Morgan's Logic and Probability, 1837-1847, *History and Philosophy of Logic,* 24, 289-305.

Richards, J. L. (2002): 'In a rational world all radicals would be exterminated' : Mathematics, Logic and Secular Thinking in Augustus de Morgan's England, *Science in Context,* 15, 1, 137-184.

Shannon, C. E. (1948): A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal,* 27, july-october 1948, 379-423 et 623-656.

Sinaceur, H. (1991): *Corps et modèles, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle,* Paris, Vrin.

Smith, G.C. (1982): *The Boole De Morgan Correspondance. 1842-1864,* Oxford, Clarendon Press