

elle est sous la surveillance directe de l'Administration. La Société des sciences de Pest s'est fait, de son côté, un devoir de recueillir avec sollicitude tout ce qui est resté des papiers de son illustre compatriote et des objets qui lui ont appartenu. Quand la Hongrie, reconnaissante et fière de Csoma, lui élèvera un monument, elle payera une dette envers un de ses enfants les plus méritants et les plus glorieux. Les victoires scientifiques valent bien les victoires sanglantes de la guerre ; et lorsqu'on peut honorer une grande âme, jointe à tant d'intelligence, c'est un devoir de n'y pas manquer. On sert tout ensemble un intérêt patriotique et un intérêt plus haut, celui de l'humanité, qui ne doit jamais oublier de si nobles exemples.

BARTHÉLEMY-SAINT HILAIRE.

ŒUVRES COMPLÈTES DE LAPLACE, publiées, sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les Secrétaires perpétuels. Théorie analytique des probabilités. Quatrième édition.

En relisant l'exposition de la théorie analytique des probabilités, chef-d'œuvre consacré déjà par une admiration de près d'un siècle, une exclamation, rencontrée dans une lettre adressée en 1734 à l'un des Bernoulli, me revenait souvent en mémoire : « Facile videbis esse hunc calculum non minus nodosum quam jucundum ! » Laplace, sans accepter cette épigraphe, a pris soin de la justifier. Rien n'est plus clair, plus profond, plus éloquent parfois que l'introduction qui forme les CLIII premières pages. Elle est le développement d'une leçon donnée en 1795 aux écoles normales, c'est-à-dire près de vingt ans avant la publication du livre, dont elle reste entièrement distincte. Le but du grand géomètre était alors de présenter à des esprits cultivés, mais à peine initiés aux mathématiques, les résultats généraux et les principes de la théorie des chances. Le programme est suivi à la lettre ; aucun calcul n'interrompt l'exposition, que Laplace sait rendre rigoureuse et complète. Cette introduction est un livre, le meilleur, sans contredit, et le plus facile à lire que l'on ait écrit sur le calcul des probabilités.

Une double opinion s'est formée sur les mérites très différents du *Traité analytique* :

Il est impossible de bien connaître le calcul des probabilités sans avoir lu le grand ouvrage de Laplace.

Il est impossible de comprendre Laplace sans de très profondes études mathématiques.

La seconde proposition est incontestable. Les meilleurs élèves sortant de nos écoles spéciales, les auditeurs de nos facultés, après avoir obtenu avec distinction le diplôme de licencié, s'ils abordent sans préparation nouvelle le livre de Laplace, seront rebutés très constamment par les difficultés de la méthode.

L'exposition commence par des considérations générales sur la théorie des grandeurs; elles attestent la hauteur de vues et la vaste érudition de l'auteur, sans qu'aucune ligne révèle au lecteur qu'on le prépare à l'étude du calcul des probabilités. Laplace y énonce le beau théorème resté aujourd'hui encore sans preuve rigoureuse : *On ne peut obtenir en fonction finie et explicite de la variable l'intégrale*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}$$

Pourquoi, si le grand géomètre a réellement démontré cette impossibilité, choisit-il pour l'annoncer les premières pages d'un livre sur le calcul des probabilités? La lecture des chapitres qui suivent n'éclaircit nullement cette énigme. La théorie des fonctions génératrices remplit les 189 pages suivantes; elle sera d'un grand secours, on le verra, dans l'étude des questions relatives au hasard; mais rien ne l'annonce au lecteur. Il semble que Laplace ait voulu inscrire en tête de son livre : *Que nul ne l'ouvre s'il n'est géomètre*. Cette théorie, qui remplit le premier chapitre, est indispensable à l'intelligence des suivants; elle s'introduit dans toutes les solutions. Par une singulière préoccupation d'inventeur, Laplace, en appliquant la méthode qu'il a créée, semble oublier que, dans le plus grand nombre de cas, d'autres plus accessibles conduiraient au même but. Les premiers problèmes semblent moins choisis pour l'intérêt qu'ils présentent que pour montrer, par des exemples, la fécondité de la méthode :

Trouver la probabilité pour qu'en faisant dans une loterie un certain nombre de tirages, tous les numéros se soient montrés au moins une fois;

Trouver la probabilité pour qu'en appelant successivement les numéros inscrits sur des boules tirées au hasard, un ou plusieurs d'entre eux se présentent à leur rang;

Trouver la probabilité pour qu'une urne composée de boules noires et de boules blanches conserve un nombre désigné de boules blanches, après qu'un

certain nombre de fois une boule a été tirée au hasard et, qu'elle soit blanche ou noire, remplacée par une boule noire.

Le second livre s'achève, comme le premier, sans que le lecteur, dans les trois cents pages qu'il a dû lire, ait trouvé autre chose qu'une savante leçon de mathématiques.

Avec le troisième livre, intitulé *Des lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements*, l'intérêt se déplace, et les lois du hasard prennent enfin le premier rang.

Le beau théorème de Bernoulli fait le grand intérêt des questions successivement discutées : les épreuves répétées corrigent le hasard et les événements, par une loi nécessaire, se groupent à la longue en nombres proportionnels à leur probabilité. La certitude, bien entendu, n'est jamais acquise ; mais on en approche sans limites, et, quand les épreuves sont suffisamment nombreuses, tout écart valable est sans exemple.

Bernoulli a médité vingt ans ce théorème, légué à ses neveux comme la grande découverte qui devait surtout, après une longue et brillante carrière, immortaliser un nom déjà illustre. La démonstration est longue et difficile et, pour la simplifier, on l'a rendue inaccessible aux esprits curieux peu familiers avec l'algèbre.

Précisons l'énoncé du théorème.

Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion connue. Vingt boules blanches, par exemple, contre dix noires. On tire une boule au hasard. Après l'avoir remise dans l'urne, on en tire une seconde, puis une troisième. Les boules tirées peuvent être blanches ou noires (aucune règle ne restreint les effets du hasard) ; mais, si les tirages deviennent nombreux, si l'on en fait mille, par exemple, ou, mieux encore, trente mille ou trois cent mille, le nombre des boules blanches sorties sera, comme dans l'urne, double de celui des boules noires. Sur 3,000 tirages, on aura à peu près 2,000 boules blanches, 20,000 sur 30,000 tirages, 200,000 sur 300,000. La probabilité d'un écart notable est tellement petite que l'événement, selon nos habitudes de langage, peut être déclaré impossible. La certitude s'établit ainsi dans les effets capricieux du hasard.

Ce théorème est à la fois très étrange et très conforme aux indications du bon sens et aux conclusions instinctives de notre esprit. Laplace, en l'énonçant dans l'introduction rédigée pour les lecteurs peu familiers avec l'algèbre, n'en esquisse pas même la démonstration. « Indiqué, dit-il, par le bon sens, il était difficile à démontrer par l'analyse ; aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée.

Le calcul des fonctions génératrices, appliqué à cet objet, non seulement démontre avec facilité ce théorème, mais, de plus, il donne la probabilité que le rapport des événements observés ne s'écarte que dans certaines limites du vrai rapport de leurs possibilités respectives. » La démonstration de Laplace va beaucoup plus loin, en effet, que celle de Bernoulli, plus loin même que les admirables commentaires de Moivre, perfectionnés par Stirling.

Non seulement le nombre des événements de chaque espèce est soumis à une loi régulière, mais les écarts de cette loi se régularisent eux-mêmes, avec le nombre des épreuves, et, à la longue même, les écarts des écarts.

Supposons, par exemple, qu'une pièce de monnaie soit jetée en l'air cent fois de suite; elle montrera cinquante fois environ le côté pile et cinquante fois le côté face; mais l'égalité absolue des deux nombres n'est pas à espérer. Comme on dit très correctement, l'événement le plus probable a fort peu de chance d'arriver. Si deux hypothèses seulement étaient possibles, un tel énoncé impliquerait contradiction; mais quand les cas sont nombreux, et ici il y en a cent, on comprend que le plus probable de tous ne réunisse pas beaucoup de chances.

Sur cent épreuves, on doit donc admettre que la pièce montrera face, tantôt plus de 50 fois, tantôt moins, 51, 52, 53, quelquefois 54 ou 55 fois, quelquefois aussi 49, 48, 47 ou même 46 ou 45 fois; la moyenne des écarts, considérée en valeur absolue, peut, d'après un théorème de Laplace, être calculée à l'avance: elle est à peu près égale à 5, et doit en approcher d'autant plus qu'on accroîtra davantage le nombre des séries de cent épreuves.

La moyenne des carrés des écarts tend aussi vers une limite donnée par Laplace, et le rapport d'une de ces limites au carré de l'autre, facile à vérifier avec un peu de patience, est égal au rapport de la circonférence au diamètre.

On peut donc, en jetant en l'air une pièce de monnaie, comptant le nombre de fois qu'arrive pile et celui des arrivées de face dans une série de cent épreuves et en multipliant le nombre des séries, former, par un calcul régulier sur les résultats donnés par le hasard, une valeur approchée du nombre π , et, si l'on accroît le nombre des épreuves, on verra le nombre des décimales exactes augmenter, lentement il est vrai, mais avec une certitude infailible. Laplace n'a nullement songé à rendre ces résultats accessibles à ceux qui reculeraient devant de trop savants calculs.

Il ne serait pas impossible cependant de donner, sans le secours du

calcul, une preuve rigoureuse du théorème de Bernoulli, énoncé dans les termes mêmes où l'illustre inventeur le proposait après vingt années de méditation.

L'étude du sort des joueurs, faite pour la première fois par Pascal, peut conduire, par un raisonnement très simple, à ce résultat de haute importance.

Supposons, pour traiter le cas le plus simple, deux joueurs qui exposent à un jeu de hasard des enjeux égaux avec chance égale de gagner. Le nombre des parties convenues étant μ , l'un des deux probablement fera un gain, petit ou grand, le cas d'égalité arrivant rarement.

Supposons qu'un troisième joueur, pour s'intéresser à la partie, s'engage à payer au gagnant, quel qu'il soit, le bénéfice gagné par les μ parties. Ce troisième joueur ne peut rien gagner, il est presque assuré de perdre quelque chose. L'engagement qu'il prend doit être payé équitablement par une somme calculée d'après les règles du calcul des chances. Désignons par $\varphi(\mu)$ cette valeur équitable, convenue à l'avance, de la perte faite sur μ parties par celui des joueurs que la chance ne favorisera pas. Si au lieu de μ parties on convient d'en faire 2μ , croit-on que $\varphi(\mu)$ doublera? Il s'en faut de beaucoup. La perte probable n'est pas doublée quand, au lieu de cent parties, on en fait deux cents. Cette vérité, que sans aucun calcul un peu d'attention rend évidente, équivaut au théorème de Bernoulli. 2μ parties représente deux séries de μ parties. Si la perte probable dans une série de μ parties vaut $\varphi(\mu)$, celui qui s'engage à payer la perte correspondante à 2μ parties court deux chances très différentes :

1° Le même joueur dans les deux séries aura deux fois l'avantage. La chance dans ce cas est doublée.

2° Chaque joueur à son tour gagnera plus de la moitié des parties. Le gain total sera alors la différence entre les deux gains successifs, il n'est pas nul, parce que le hasard donnera vraisemblablement deux chiffres différents; quel que soit le plus grand, il faudra payer son excès sur le plus petit; mais cet excès, on l'admettra sans peine, vaut moins que l'une des deux sommes dont il est la différence. Les deux hypothèses ont probabilités égales; et celui qui s'engage à payer la perte des 2μ parties accepte une charge qu'il faut évaluer à la demi-somme des deux valeurs également vraisemblables :

$$\frac{1}{2} (2\varphi(\mu) + X)$$

X étant plus petit que $2\varphi(\mu)$, plus petit même, on peut l'admettre

que $\varphi(\mu)$, car qui ne préférerait payer la différence des deux séries successives plutôt que l'un des deux termes de cette différence?

On peut donc écrire, en employant une notation bien familière à quiconque a fait quelques études mathématiques :

$$\varphi(2\mu) < \frac{3}{2} \varphi(\mu)$$

Cette inégalité étant vraie, quel que soit le nombre désigné par μ , on peut remplacer μ successivement par 2μ , 4μ , 8μ , et conclure par ce raisonnement bien simple que la fonction $\varphi(z)$, pour une très grande valeur de z , devient très petite par rapport à z .

La théorie de Bernoulli en est la conséquence immédiate. Si, en effet, sur un nombre infini de parties, la valeur du gain qui se fait, équitablement payé avant l'épreuve, est une fraction infiniment petite du nombre de parties jouées, il faut que la différence entre le nombre des parties gagnées et celui des parties perdues ait une probabilité infiniment petite seulement d'avoir, avec le nombre des parties, un rapport qui ne soit pas très petit.

La démonstration savante et compliquée de Laplace va beaucoup plus loin. Une table, calculée une fois pour toutes, qui représente les valeurs d'une certaine intégrale, donne avec précision la probabilité pour que l'écart, dans un nombre donné d'épreuves, ne surpasse pas un nombre assigné. La probabilité reste la même, si l'écart relatif diminue en raison de la racine carrée du nombre des épreuves. Si, par exemple, on jette cent fois une pièce de monnaie, la probabilité pour que le nombre des coups qui donnent face soit compris entre 40 et 60 est 0,9648; mais si on le jette 10,000 fois, c'est-à-dire si l'on multiplie par cent le nombre des épreuves, le même nombre 0,9648 représentera la probabilité pour que le nombre des épreuves soit compris entre 5,300 et 4,800. Si l'on quadruple le nombre des épreuves, il devient 40,000, et la probabilité 0,9648 correspond à un nombre de fois compris entre 20,400 et 19,600. L'écart qu'on est à peu près certain de ne pas dépasser, entre le nombre des jets et la moitié du nombre des épreuves, est, pour cent épreuves, le dixième du nombre total; pour 10,000 épreuves, il n'est plus que le centième; pour 400,000, il en est le deux-centième, et, si l'on faisait 100 millions d'épreuves, on aurait la probabilité 0,9648 de ne pas voir le nombre des coups face sortir des limites 5,020,000 et 4,980,000. On peut parier 26 contre 1 que l'écart n'atteindra pas une unité sur 20,000 épreuves.

Le théorème de Bernoulli ne règle pas seulement le sort des joueurs qui lancent des dés ou qui manient des cartes, il s'applique avec une

merveilleuse précision à tous les phénomènes dont la répétition se fait dans les mêmes circonstances. La proportion des filles et des garçons en est un exemple remarquable.

C'est en 1745 que l'on a commencé à distinguer à Paris, sur le registre, les baptêmes des garçons de ceux des filles; on a constamment observé pour les premiers un nombre supérieur à celui des seconds. Entre l'année 1745 et l'année 1784, pendant 40 ans par conséquent, le nombre des baptêmes a été :

Pour les garçons	393,386
Pour les filles	377,555

et le rapport des deux nombres, toujours plus grand que l'unité, a varié, pendant cette période, entre des limites très étroites.

Le rapport, observé depuis un siècle avec une exactitude que l'on peut regarder comme absolue, ne varie que fort peu avec le temps et avec le climat. Le nombre des naissances masculines correspondant à mille naissances féminines est :

En Angleterre	1,045
En France	1,064
En Hollande	1,059
En Portugal	1,061
En Russie	1,089

Une question difficile se présente. Cette permanence incontestable peut-elle être rattachée au théorème de Bernoulli? Peut-on, comme le faisait son neveu Nicolas, imaginer un dé à 35 faces dont 18 seraient blanches et 17 noires, et assimiler le nombre des naissances des filles à celui de l'arrivée des faces noires, dans un nombre d'épreuves égal à celui des naissances? La proportion évidemment restera la même, puisque c'est d'après le rapport bien connu que le dé a été choisi; mais l'identité des lois ira-t-elle plus loin? Les chiffres fournis par le hasard ne coïncident jamais avec le plus probable; les écarts diminuent en valeur relative avec le nombre des épreuves, mais ils augmentent en valeur absolue, et leur moyenne sur un grand nombre de séries d'épreuves peut être assignée à l'avance.

Il serait très curieux de chercher si les nombres des naissances satisfont à ces conditions indiquées par la théorie. Quelques épreuves autorisent à le croire. Aucun raisonnement ne pourrait, *a priori*, faire accepter comme une identité l'assimilation avec les problèmes relatifs aux urnes et aux dés.

Laplace traite une autre question. La supériorité du nombre de nais-

sances masculines ayant été observée pendant quarante ans, il cherche la probabilité pour qu'elle se maintienne pendant un temps donné, par exemple dans l'espace d'un siècle; il la trouve égale à 0,782. Il y avait donc, dit-il, à la fin de 1784 près de quatre à parier contre un que, dans l'espace d'un siècle, les naissances des garçons l'emportent chaque année sur celui des filles. Les principes mêmes de Laplace n'autorisent pas une évaluation aussi précise.

Le problème qu'il résout est celui-ci :

Une urne de composition inconnue contient des boules noires et des boules blanches; on a fait trois cent mille tirages. Le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules noires est celui de 1,060 à 1,000. Quelle est la probabilité pour qu'en faisant un millier de tirages nouveaux, le rapport conserve à très peu près la même valeur?

La confiance que doit inspirer le résultat dépend de celle qu'on accorde à l'assimilation dont il est déduit. Cette assimilation, d'une part, est contestable, et le problème résolu par Laplace est lui-même susceptible de solutions très diverses.

Un exemple fera comprendre l'assimilation.

On jette six cents fois de suite deux dés ordinaires de six faces. On compte le nombre de fois que paraîtra le point *six*. Deux cents, sixième de douze cents, est le nombre le plus probable. Le hasard donne deux cent cinquante. Quelle est la probabilité pour que les dés soient irréguliers et, comme on dit ordinairement, pipés? Il est impossible de répondre sans s'informer de l'origine des dés. Si ces dés ont été saisis par la police dans une maison de jeu clandestine, la probabilité cherchée ne sera pas la même que s'ils ont été achetés la veille chez un fabricant estimé. Si ces dés ont été choisis entre beaucoup d'autres, après de nombreuses épreuves, la confiance qu'ils inspiraient sera diminuée peut-être, mais la probabilité pour qu'ils soient défectueux restera sans doute, malgré l'anomalie qui s'est produite, supérieure de beaucoup à $\frac{1}{2}$. La probabilité cherchée est atténuée en un mot par les résultats observés, elle n'est pas déterminée par eux; elle avait, avant l'épreuve, une certaine valeur; il est impossible de faire le calcul sans connaître cette valeur ou sans faire sur elle quelque hypothèse. Laplace suppose, en effet, qu'avant la connaissance des documents statistiques, on pouvait, avec des chances égales, assigner à la probabilité de la naissance d'un garçon toutes les valeurs possibles.

Il n'est pas permis de passer sous silence le chapitre sur la probabilité des jugements.

Laplace, dans son introduction, définit le problème avec une sage

réserve : « On a soumis, dit-il, au calcul la probabilité des témoignages, les votes et les décisions des assemblées électorales et délibérantes et les jugements des tribunaux. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles. Mais la solution de problèmes plus simples, et qui ont avec elles beaucoup d'analogie, peut souvent répandre sur ces questions difficiles et importantes de grandes lumières, que la sûreté du calcul rend toujours préférables aux jugements les plus spécieux. »

Laplace semble s'écarter de ces sages réserves quand il dit comme conclusion de l'étude des jugements :

« Si la moitié des jugements d'un tribunal (quel que soit le nombre des juges) a été rendu à l'unanimité, la probabilité pour qu'un nouveau jugement rendu à l'unanimité par le même tribunal soit conforme à la vérité sera 0,981. Si ce jugement n'est rendu qu'à la pluralité, la probabilité sera 0,789. »

Laplace dit ailleurs :

« Dans les tribunaux où sur huit juges cinq voix seraient nécessaires pour la condamnation d'un accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasserait $\frac{1}{4}$. Dans les tribunaux qui ne peuvent condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près $\frac{1}{4}$, si le nombre des juges est six; elle est au-dessus de $\frac{1}{7}$, si ce nombre s'élève à douze. »

Ses calculs sont inaccessibles même à la plupart de ceux dont l'instruction mathématique est la plus solide, mais l'autorité de l'auteur de la Mécanique céleste ne permet aucun doute sur leur exactitude. Ainsi pensait Arago. Dans la discussion sur la loi du jury en 1836, il proposa à la Chambre les chiffres de Laplace comme rigoureusement démontrés. Un député, homme de bon sens, ce jour-là au moins, avait laissé paraître quelques doutes. Arago le traita fort mal. Il parlait au nom de la science, les ignorants devaient s'abstenir; les chiffres donnés par Laplace étaient aussi certains, suivant lui, que la parallaxe du soleil égale à 8",60.

La parallaxe du soleil a été corrigée depuis. Les chiffres de Laplace n'ont point à l'être, ils sont sans valeur. Le problème n'est pas accessible au calcul. Il est intéressant d'en raconter l'histoire.

Condorcet le premier, sur l'invitation de Turgot, a voulu calculer la probabilité des décisions judiciaires. On l'en a beaucoup loué. En portant dans ce dédale le flambeau de l'analyse, a dit Arago, Condorcet n'a pas seulement fait preuve de hardiesse, il a ouvert une route entièrement nouvelle. Laharpe, sans entrer au détail, avait signalé la même

tentative, dans un langage un peu trop vif, comme un usage extravagant des mathématiques. On jugera sur quelques citations.

Condorcet, comme l'ont fait après lui Laplace et Poisson, donne la solution irréprochable d'un problème très nettement posé. Les mathématiques sont donc hors de cause, le bon sens doit décider seulement ce qu'il faut espérer de l'assimilation proposée.

Condorcet suppose un certain nombre d'urnes contenant chacune des boules noires et des boules blanches. La proportion est la même dans toutes les urnes. Il cherche la probabilité pour qu'en tirant une boule de chaque urne, les boules blanches soient en majorité, ou, plus généralement, pour que leur nombre soit dans un rapport donné avec celui des boules noires.

Si dans chaque urne les boules blanches sont en majorité, la probabilité pour qu'elles le soient aussi parmi les boules tirées au hasard approche autant qu'on veut de la certitude si l'on augmente le nombre des urnes. Les urnes, on le devine, ce sont les juges; les boules blanches sont les décisions justes. Les boules noires représentent l'erreur. Les boules blanches l'emportent, on l'accordera volontiers. Quel est le juge qui se trompe une fois sur deux? Les autres hypothèses inspirent plus de défiance :

La chance d'erreur est la même pour tous les juges.

Elle est la même aussi pour toutes les causes jugées.

L'impossibilité d'une telle constance, en la considérant même comme approchée, enlève toute valeur aux conclusions qu'on en peut déduire. Condorcet cependant la propose, on pourrait dire l'impose, avec une confiance absolue. Il lui semble, grâce à elle, tellement facile d'obtenir quand on le voudra la certitude de ne pas se tromper, qu'il craint d'exagérer et cherche à quelle limite il sera sage de s'arrêter. Il s'agit d'assigner une probabilité au-dessous de laquelle on ne puisse agir sans injustice ou sans imprudence. Il suppose que le risque de l'erreur doit être tel que l'on néglige un risque semblable même lorsqu'il est question de notre propre vie. On ferait mieux encore, dit-il, par un trait de sensibilité qui appartient à l'époque, de chercher non seulement le risque qu'on néglige soi-même, mais ceux que les hommes de bon sens regardent comme nuls lorsqu'il s'agit des personnes qu'ils aiment.

Il ne faut que choisir.

Buffon évaluait ce risque à $\frac{1}{10,000}$, parce qu'on n'est pas frappé, en général, de la crainte de mourir dans l'espace d'un jour, et que $\frac{1}{10,000}$ peut être regardé comme l'expression de ce risque. Cette idée ne plaît pas à Condorcet, qui cependant la discute avec conscience. Supposons, dit-il,

par exemple, que l'on sache combien il périclite de paquebots sur le nombre de ceux qui vont de Douvres à Calais, et qu'on n'ait égard qu'à ceux qui sont partis par un temps regardé comme bon et sûr par les hommes instruits dans la navigation, il est clair qu'on aura par ce moyen la valeur d'un risque que l'on peut négliger sans imprudence.

On pourrait encore employer utilement certains dangers que des hommes prudents, qui ne manquent point de courage, évitent ou bravent suivant leur manière personnelle de voir et de sentir. Tel est le passage du Pont-Saint-Esprit. Il ne faut pas choisir légèrement, et Condorcet consacre plus de dix pages à chercher les dangers que la législation peut sans scrupule faire courir à des innocents.

Le choix une fois fait, il faudra calculer le nombre de juges qu'il rend nécessaire et la majorité que l'on doit fixer, pour maintenir dans les limites choisies la probabilité d'une injustice.

La probabilité pour qu'un juge se trompe est la base du calcul; il faut la découvrir. Un premier moyen se présente, un peu compliqué mais infallible.

Je suppose, dit-il, que l'on connaisse un certain nombre de décisions formées par les votants dont la voix a la même probabilité que celle des votants sur les décisions futures, de la vérité desquelles on veut acquérir une certaine assurance. Je suppose de plus qu'on ait choisi un nombre assez grand d'hommes vraiment éclairés, et qu'ils soient chargés d'examiner une suite de décisions dont la pluralité est déjà connue, et qu'ils prononcent sur la vérité ou la fausseté de ces décisions. Si parmi les décisions de ce tribunal d'examen on n'a égard qu'à ceux qui ont une certaine pluralité, *il est aisé de voir* qu'on peut, sans erreur sensible, ou les regarder comme certains, ou supposer à la voix de chacun des votants de ce tribunal une probabilité un peu moindre que celle qu'elle doit réellement avoir, et déterminer, d'après cette supposition, l'infaillibilité de ces jugements.

Le principe est toujours le même. La chance d'erreur pour une catégorie de juges est indépendante de la cause jugée. Qu'il y ait flagrant délit et aveu, ou mystère inexplicable dans l'accomplissement du crime, la chance d'erreur du juge reste la même, et petite si le juge est un homme véritablement éclairé.

Les conséquences d'une telle fiction ne peuvent avoir, on le comprend, aucune apparence de vérité.

Laplace a repris le principe de Condorcet. Il fait varier pour chaque cause la probabilité d'erreur, mais comment la trouver? Le nombre des voix favorables à la décision prise et le nombre des voix contraires

servent de base à ses calculs. Comme Condorcet, il substitue à la question un problème nettement posé, qui, suivant lui, s'en rapproche assez pour que l'assimilation soit permise. Un certain nombre d'urnes représentent, pour lui comme pour Condorcet, les juges ou les jurés appelés à prendre une décision. Ces urnes ont même composition, mais (c'est en cela que les théories diffèrent) la composition change d'une cause à l'autre.

Le progrès est grand assurément, mais l'assimilation avec les cas réels, pour être moins choquante, ne peut aller jusqu'à mériter la confiance. Les urnes étant préparées, on tire une boule de chacune d'elles; si le nombre des boules blanches est en majorité, le jugement est équitable; il y a erreur si les noires l'emportent.

Lorsque le jury prononce un verdict, on ne peut savoir qu'une chose : tant de voix ont opiné dans un sens et tant dans le sens contraire, mais la majorité s'est-elle prononcée pour la vérité ou pour l'erreur; les boules sorties de l'urne en majorité sont-elles noires ou blanches? On sait les partager en deux groupes, mais on ignore le nombre des boules blanches.

Si, par exemple, sur les douze urnes, huit ont donné une même couleur et quatre la couleur opposée, deux hypothèses sont possibles : il y a huit blanches et quatre noires, ou huit noires et quatre blanches. Quelle est la probabilité de chacune? Laplace, pour résoudre le problème, fait une hypothèse très hardie et, il faut l'avouer, peu acceptable.

Toutes les compositions possibles des urnes sont, *a priori*, également possibles, avec cette restriction, toutefois, que les boules blanches sont en majorité. Cette hypothèse complète le nombre des équations nécessaires, et une savante analyse, dès lors irréprochable, donne la probabilité demandée.

Telles sont les conditions qu'Arago, qui sans doute ne les avait pas examinées de près, déclarait aussi certaines que la théorie du soleil.

Tous les juges qui prononcent sur une même cause ont probabilité égale de bien juger. Cette probabilité peut varier de $\frac{1}{2}$ à 1. Toutes les valeurs sont également probables. La seule condition invoquée pour la déterminer est la connaissance de la majorité obtenue. Si, par exemple, sur les douze jurés, onze ont prononcé dans un sens et un seul en sens opposé, le verdict aura une grande probabilité d'être excellent. La probabilité d'erreur pour chaque juge sera petite et, conclusion imprévue, le dissident lui-même puisera dans cette presque unanimité un titre à la confiance, car tous les jurés, on le suppose, ont même probabilité

d'erreur; celui-là est donc aussi bien que les autres éclairé et sagace; il a comme eux dix-neuf chances contre une de ne pas se tromper; en prononçant mal, il est tombé sur la vingtième chance, voilà tout.

S'il est impossible d'accorder à Laplace cette égalité entre les probabilités de tous les nombres qui peuvent mesurer la confiance méritée par un juge, il est malheureusement plus impossible encore d'admettre que cette mesure soit dans toutes les causes plus grande que $\frac{1}{2}$.

Condorcet, admettant pour chaque juge une probabilité indépendante de la question qui lui est posée, ne pouvait manquer de la supposer plus grande que $\frac{1}{2}$. Mais Laplace, acceptant pour chaque cause une probabilité d'erreur particulière, ne peut nous persuader que, dans les cas difficiles, cette probabilité soit moindre que $\frac{1}{2}$. Si le coupable a su éviter tous les indices révélateurs, si le hasard a réuni contre un innocent des preuves concordantes très nombreuses et très graves, si un habile avocat a su porter le trouble dans l'esprit des jurés, la probabilité d'erreur peut devenir très grande.

Une autre difficulté non moins grave s'élève contre la théorie de Laplace : les urnes dans lesquelles on puise, quelle que soit leur composition, sont supposées indépendantes; la boule extraite d'une urne est sans influence sur celle que fournit l'urne voisine; les probabilités sont les mêmes, mais les tirages indépendants. Un juré peut, au contraire, influencer son voisin, parler avec force, avec habileté, et détruire cette indépendance sans laquelle le calcul est impossible.

Poisson, grand admirateur de Laplace, et toujours fier de se dire son élève, juge ainsi les travaux de son maître sur la probabilité des jugements : « L'exactitude du principe invoqué par Laplace se démontre en toute rigueur; l'application qu'il en fait à la question qui nous occupe ne peut non plus laisser aucun doute. » L'approbation semble complète, mais Poisson ajoute : « Pour cette application, Laplace fait une hypothèse qui n'est point incontestable. Soit à cause de cette hypothèse, soit à cause des conséquences qui m'ont paru inadmissibles, les solutions du problème de la probabilité des jugements qui se trouvent dans le Traité des probabilités et dans le premier Supplément ont toujours laissé beaucoup de doutes dans mon esprit. »

Poisson condamne donc formellement les hypothèses de Laplace et les conséquences qu'il en déduit. Lui-même a proposé une théorie de la probabilité des jugements et conduit jusqu'à l'application la déduction de ses principes.

Poisson, comme Condorcet, suppose la probabilité d'un jugement équitable égale pour tous les jurés et pour toutes les causes, il suppose

également pour chaque accusé une probabilité d'innocence qu'il prend pour inconnue et que son analyse suppose invariable.

Ces conditions admises rendent le problème facile. On peut l'énoncer ainsi : « Douze urnes ont la même composition ; on tire une boule de chaque et l'on note le nombre de boules blanches et celui des noires. L'épreuve est renouvelée un grand nombre de fois. On compte le nombre des cas où toutes les boules tirées sont de la même couleur, et de ce nombre on peut conclure, avec une probabilité aussi grande qu'on le voudra, le rapport, dans chaque urne, du nombre des boules blanches à celui des boules noires. On déduira de cette composition, maintenant connue, la probabilité pour qu'un condamné soit innocent et pour qu'un acquitté soit coupable. Par conséquent, d'après le théorème de Bernoulli, on connaît le nombre des condamnations et celui des acquittements injustement prononcés.

Le défaut d'une telle méthode est évident. L'erreur de Poisson, plus grave au point de vue mathématique que celle de Condorcet et de Laplace, consiste à remplacer des probabilités qu'il sait très inégales par une valeur moyenne la même pour toutes.

Or il n'est pas exact qu'en remplaçant les juges par des urnes de composition moyenne, qui donnent en somme le même nombre total de condamnations, les jugements rendus à une majorité resteront les mêmes. Supposons trois urnes contenant : l'une quatre boules blanches, l'autre trois noires et une blanche, l'autre deux noires et deux blanches.

Une condamnation juste, prononcée à l'unanimité, sera représentée par la sortie de trois boules blanches. Elle a pour probabilité $\frac{1}{8}$. Si l'on remplace les trois urnes par trois autres donnant chacune à la sortie d'une boule blanche la probabilité moyenne $\frac{2}{3}$, la probabilité d'un jugement juste prononcé à l'unanimité deviendra $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, très différent de $\frac{1}{8}$.

Cet exemple suffit pour montrer d'impossibilité de remplacer les probabilités inégales qui concourent à un même événement par une valeur moyenne. L'analyse de Poisson s'évanouit alors. Il faut renoncer à accepter $\frac{2}{3}$, sur la foi de ses démonstrations, comme la probabilité d'erreur d'un juré, déduite de l'observation.

Un savant distingué, qui, sur plus d'une question importante, a proposé des idées ingénieuses, Cournot, a introduit dans la théorie des jugements une condition nouvelle qui la rapproche de la vérité, en la laissant cependant beaucoup trop loin pour qu'aucune application soit permise.

Cournot, considérant un tribunal de trois juges, s'affranchit de

l'hypothèse faite par ses prédécesseurs sur leur égale perspicacité. Il suppose malheureusement, pour chacun d'eux, une chance égale d'erreur pour toutes les causes qui lui sont soumises. Si cette invariabilité est proposée comme réelle, l'erreur n'est pas tolérable. Si l'on croit pouvoir, à des valeurs très diverses, substituer une moyenne, on commet une faute des plus graves.

Quoi qu'il en soit, Cournot, acceptant le principe, cherche dans la statistique des décisions d'un même tribunal un moyen de juger, non seulement le mérite relatif, mais la perspicacité absolue de chacun des juges. Si les juges étaient trois urnes desquelles, pour chacune des causes, un tirage au sort ferait sortir l'erreur ou la vérité, sans aucune influence réciproque des trois opinions obtenues, la formule de Cournot serait irréprochable. Appliquée à la réalité, elle donnerait les conclusions les plus étranges.

Si la statistique qu'il désire était acceptée comme un indice du mérite des juges, celui d'entre eux qui se ferait une règle de voter avec le président, sans jamais le contredire en rien, se trouverait désigné par la formule comme le plus perspicace et le plus consciencieux des juges; sa probabilité de bien juger approcherait de la certitude. Non que Cournot admette que, dans chaque cause, la vérité soit toujours du côté qui sur trois opinions en réunit deux; une erreur si grossière n'est pas à craindre; mais il suppose que de ce côté la chance d'erreur est plus petite; cela suffit, sur un grand nombre d'épreuves, pour obtenir les résultats indiqués.

La théorie de la combinaison des observations mérite une mention spéciale.

La théorie affirme, cette fois encore, la possibilité d'obtenir la certitude par la combinaison fortuite de résultats isolément douteux. Le cas le plus simple, que nous prendrons pour exemple, est celui d'une grandeur à mesurer. Quel que soit l'instrument, une erreur est inévitable. La même mesure, recommencée plusieurs fois, ne donne pas rigoureusement le même résultat. Si c'est un poids, la différence est de quelques milligrammes, souvent de quelques grammes; de quelque fraction de seconde, de quelques secondes peut-être, si c'est un angle. En présence de ces nombres inégaux, si rien n'accroît ou ne diminue d'une manière particulière la confiance en l'un d'eux, il faut prendre la moyenne. Cette moyenne, suivant les résultats du calcul, diffère d'autant moins de la vérité que le nombre des observations sera plus grand. La confiance qu'elle inspire peut s'accroître autant qu'on le voudra avec le nombre des résultats combinés.

La démonstration d'une telle assertion suppose, bien entendu, quelques conditions.

Les imperfections de l'instrument ne doivent pas être de nature à altérer le résultat toujours dans le même sens.

Il faut supposer aussi l'observateur exempt d'erreur personnelle.

Si l'on pèse avec de faux poids, si l'observateur a dans la vue un défaut qui lui fasse voir un alignement quand l'objet éloigné est un peu à gauche, on pourra recommencer indéfiniment, la moyenne donnera le résultat entaché de ces erreurs que l'on nomme constantes. On suppose qu'elles n'existent pas ou qu'elles aient été étudiées à l'avance et retranchées du résultat.

La théorie suppose encore autre chose.

Les erreurs en plus ont une probabilité égale à celle des erreurs en moins, et la loi inconnue ou connue qu'elles suivent dans les deux sens est rigoureusement la même. L'erreur commise sur la moyenne décroît alors avec le nombre des épreuves, et l'erreur qu'il y a une probabilité donnée de ne pas dépasser est en raison inverse de la racine carrée du nombre des épreuves. La théorie, même entourée de restrictions nécessaires et nettement indiquées dans la démonstration, ne semble pas d'accord avec les indications du bon sens. Si, toutes les conditions admises étant remplies, on connaît trois observations du même angle, trois observateurs habiles, dignes de la même confiance, ont trouvé $47^{\circ} 27' 17''$, $47^{\circ} 27' 21''$, $47^{\circ} 54' 12''$, personne ne songera à prendre la moyenne, et l'on exclura le troisième observateur, persuadé que quelque circonstance l'a troublé.

La règle cependant est démontrée sans exception. En regardant de près, on aperçoit qu'il n'en est pas ainsi, et qu'une condition a été introduite sur laquelle l'attention n'est pas appelée.

Le problème résolu est celui-ci :

On a l'intention de faire un certain nombre de mesures d'une grandeur. Les conditions de chaque mesure étant connues, les limites qu'il y a probabilité donnée de ne pas franchir à chaque observation étant connues, quel sera le meilleur usage à faire des observations ? La théorie répond : Il faut prendre la moyenne, et l'erreur dont la probabilité est donnée diminuera en raison inverse de la racine carrée du nombre des mesures prises. La théorie est d'une rigueur parfaite.

On obtient ainsi une règle fort simple qui permet d'atténuer les chances d'erreur dans telle proportion qu'on le voudra.

Les choses, dans la pratique, se présentent autrement. Les observations faites sont tout autre chose que des observations qu'on a l'inten-

tion de faire. Si l'on suit attentivement la démonstration, on y aperçoit les probabilités d'erreur de chaque mesure désignées par des lettres inconnues, et chaque fois que le calcul amène soit l'une de ces lettres, soit le produit de deux d'entre elles, la valeur moyenne du terme est considérée comme nulle. C'est la conséquence légitime de l'hypothèse; les erreurs positives et négatives ont même probabilité. Mais les observations une fois faites, il n'en est pas ainsi. Si l'on a obtenu cent nombres différents, peut-on croire que le plus grand de tous, ou que le produit des deux plus grands aient chance égale d'être trop petits ou trop grands? La démonstration ne s'applique plus dès que les observations sont faites.

Quel parti faut-il prendre?

Suivre la règle dans le plus grand nombre des cas; ne pas hésiter à la corriger en présence des anomalies. C'est ce que font les observateurs; ils auraient tort seulement, en corrigeant la règle, d'en rien conclure contre la démonstration.

Quelles sont les anomalies qui doivent motiver une correction?

Il serait difficile de le dire d'une manière générale. Si les observations sont nombreuses, la théorie assigne la loi qu'elles doivent suivre. Cette loi, indépendante du nombre et de la nature des causes d'erreur, est représentée par une courbe toujours de même forme, que l'on peut construire en prenant pour abscisses les erreurs et pour ordonnées le nombre de fois qu'elles se produisent. Si la courbe construite s'écarte de la forme prévue, si les deux parties à droite et à gauche de l'ordonnée moyenne ne sont pas symétriques, si la ligne ne s'abaisse pas rapidement à partir du sommet qui correspond à la moyenne, l'anomalie est certaine.

Il faut se garder, si le cas se présente, d'en rien conclure contre la théorie qui le déclare impossible.

Deux explications peuvent être admises :

Les lois du hasard sont vraisemblables, elles ne sont pas certaines. Leur probabilité peut croître sans limite, elle n'atteint jamais la certitude. Le hasard en s'écartant une fois de la règle démontrée, s'il ne la confirme pas précisément, n'apporte contre elle aucun argument légitime.

En second lieu, et cela est beaucoup plus probable, les observations que l'on présente comme faites avec le même soin et avec un instrument sans défaut, peuvent avoir été négligées ce jour-là, l'instrument a pu être faussé accidentellement, les fils de la lunette dérangés, un poids de la balance exposé à l'humidité; on sort alors des conditions supposées, et la comparaison des résultats en avertit.

Je me permettrai de signaler encore une théorie acceptée par Laplace sur laquelle les géomètres, avant et après lui, ont longuement disserté :

Je veux parler de l'espérance morale.

Cette évaluation, proposée par Daniel Bernoulli pour remplacer l'espérance mathématique, a pour origine un problème ingénieux autrefois proposé par Nicolas, cousin de Daniel, et dans lequel l'énormité des enjeux, désignés par les règles fort simples, est assez habilement dissimulée pour rendre inattendue la réponse très correcte du calcul.

Paul propose à Pierre les conditions suivantes : il jettera en l'air une pièce de monnaie. Si la pièce montre face, Pierre recevra un franc. Si elle montre pile, on jettera la pièce de nouveau, jusqu'à la première arrivée du côté pile. Si cette arrivée se produit au second coup, Pierre recevra deux francs, au troisième coup quatre francs, huit francs au quatrième, toujours en doublant, de telle sorte, par exemple, que, si face se montre vingt-neuf fois de suite, Pierre recevra un milliard.

Combien doit-il payer équitablement une telle promesse ?

Quelque somme qu'il propose, répond le calcul, son espérance mathématique sera supérieure à sa mise, le jeu, d'après les règles incontestées, lui sera avantageux.

Aucun homme raisonnable ne voudrait cependant hasarder à ce jeu une somme de quelque importance, mille francs par exemple. Comment expliquer cette divergence entre le calcul et le bon sens ?

Daniel Bernoulli, inventeur du paradoxe, a proposé, dans l'évaluation des sommes espérées par Pierre, de substituer au nombre des francs qu'il doit recevoir l'accroissement des avantages de toute sorte que l'argent peut procurer. Chaque franc payé à Pierre a pour lui d'autant moins de valeur qu'il vient s'ajouter à une fortune plus grande, un milliard ne vaut pas mille fois un million, et, d'après les évaluations de Bernoulli, il vaut à peine le double. Si l'homme qui ne possède rien acquiert ce million, puisque ce million se change en un milliard, le premier changement de fortune sera pour lui plus précieux que le second.

Cette idée, mise en formule par Bernoulli, réduit l'enjeu de Pierre à une valeur acceptable.

Laplace adopte la théorie de Bernoulli. « On reconnaît bientôt, dit-il, que l'avantage moral qu'un bien nous procure n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances, souvent fort difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune.

La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à la valeur

absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. Cette règle conduit à des résultats conformes aux indications du sens commun.

Ainsi, dans la question précédente, on suppose que, si la fortune de Pierre est de deux cents francs, il ne doit pas raisonnablement mettre au jeu plus de neuf francs. Telle est la conclusion de Laplace. Un homme plus riche que Pierre pourrait risquer vingt francs, un autre cent francs. Dans cette évaluation, on oublie complètement de s'occuper de Paul; il court toujours les mêmes risques; si le jeu pour lui est raisonnable avec l'un des adversaires, il ne le sera pas avec les autres, et cette substitution de la raison à l'équité pour régler les conditions d'un pari équivaut au conseil de ne jamais jouer. Singulière base donnée, on en conviendra, à la théorie mathématique du jeu.

La réponse véritable au paradoxe de Daniel Bernoulli n'a jamais été proposée. Aucun géomètre n'a osé dire, comme c'est la vérité : « Le calcul donne ce qu'il doit donner, il est, comme toujours, d'accord avec le bon sens soigneusement consulté. » Supposons, pour le démontrer, qu'entre Pierre et Paul il s'établisse le dialogue suivant : Paul propose à Pierre une partie au jeu inventé par Daniel Bernoulli et lui demande quelle somme il consent à payer.

« J'aime à jouer, répond Pierre, et même à jouer gros jeu, mais je me suis fait une règle de n'exposer une somme petite ou grande sans avoir chance égale d'en gagner une pareille.

« Vous ne pouvez alors, répondrait Paul, m'offrir qu'un franc seulement. L'avantage pour vous serait immense et évident. » Pierre, sans en disconvenir, maintient son principe, mais il fait observer qu'on peut jouer plus d'une partie. « Si nous jouons cinq parties, dit-il après avoir fait le calcul exact des chances, je puis vous offrir six francs pour les cinq. Il y a en effet une probabilité $\frac{1}{2}$ pour que les sommes dues pour les cinq parties dépassent par leur réunion douze francs. J'ai donc, en exposant six francs, probabilité $\frac{1}{2}$ d'en gagner six; mon principe est respecté. » Paul ne peut consentir à un tel marché. « Voulez-vous prendre l'engagement de faire mille parties? » répondrait Pierre. Je pourrai pour chacune d'elles vous offrir quatre francs, et si vous consentez à jouer un milliard de fois, j'exposerai sans hésiter trente francs par partie. Mon enjeu sera trente milliards, mais la probabilité pour en recevoir soixante surpasse de beaucoup $\frac{1}{2}$. »

La somme que Pierre peut risquer à chaque partie, sans autre imprudence que celle de jouer très gros jeu, peut grandir sans limite avec le nombre des parties.

Le calcul à qui l'on demande la valeur d'une partie la donne telle

que, sur un nombre infini, les chances s'égalisent. Or il arrive que les règles du jeu doivent, à la longue, favoriser Paul. Quelle que soit la somme hasardée, elle sera presque certainement perdue dans la plus grande majorité des cas, mais le hasard finira par en amener un, qu'à la longue le calcul promet comme presque certain, et qui compensera toutes les pertes. Le jeu n'est pas raisonnable assurément, pas plus qu'il ne le serait de placer mille francs à la roulette sur un numéro désigné, avec l'espoir de recevoir une somme immense si le numéro sort dix fois de suite.

Le jeu cependant serait équitable, et, si l'on supprimait le zéro et le double zéro, en le jouant pendant des millions de siècles, on aurait chance de ne rien perdre. Le gain arriverait tôt ou tard et compenserait toutes les pertes.

Poisson a proposé au paradoxe une réponse souvent reproduite. « Paul prend, dit-il, des engagements qu'il ne peut tenir. La difficulté tient à ce que, dans les conditions du jeu, on fait abstraction de la possibilité pour Paul de payer la somme que les chances du jeu peuvent valoir à Pierre. Quelque grande qu'on la suppose, la fortune de Paul est limitée, et Pierre ne pourra jamais recevoir davantage, ce qui limite son espérance mathématique. »

Si Paul possède cent millions de francs, Pierre, ne pouvant recevoir que cent millions, ne doit équitablement exposer que treize francs.

Il ne me paraît pas que cette évaluation attaque le fond de la difficulté. Si l'on jouait des sous, Pierre devrait, d'après ce calcul, exposer plus de treize sous. Pourquoi ne jouerait-on pas des grains de sable ? pourquoi pas des molécules d'hydrogène ? On n'a pas à craindre d'en manquer. Le paradoxe restera le même, et la réponse ne doit pas changer.

Le livre de Laplace reste, par la profondeur des réflexions comme par l'ingénieux emploi des méthodes les plus savantes pliées aux problèmes les plus simples, un livre unique dans la science, digne de l'admiration qu'il inspire. Il est bien peu lu malheureusement, et la très grande difficulté des méthodes est une des causes certainement de l'abandon dans lequel on a laissé souvent les théorèmes merveilleux et utiles du calcul des probabilités.

J. BERTRAND.