



*Journ@l Electronique d'Histoire des
Probabilités et de la Statistique*

*Electronic Journ@l for History of
Probability and Statistics*

Vol 3, n°1; Juin/June 2007

www.jehps.net

Le Problème des partis peut-il être d'origine arabo-musulmane ?

NORBERT MEUSNIER¹

Résumé

Je montre ici que l'on peut mettre en évidence une évolution, entre le XIII^{ème} et le XIV^{ème} siècles, dans les problèmes de partage rencontrés dans les arithmétiques de marchands à propos de questions de rupture de contrats. Sur cette observation, j'avance l'hypothèse selon laquelle le problème des partis, tel qu'on le voit formulé et résolu dès le XIV^{ème} siècle, ne peut trouver son origine qu'à partir de cette époque et dans ce contexte.

Abstract

I am pointing out here an evolution, between the XIIIth and XIVth centuries, in problems of division of shares discussed in commercial arithmetics on the occasion of breaches of contracts. On this basis, I wish to put forward the hypothesis that the so-called « points problem » or better said the problem of the division of stakes, formulated and solved as soon as the XIVth century, can only find its origin from this period onward and in this specific context.

1 Du problème des partis aux problèmes de compagnie.

Je laissais entendre à la fin de l'article « Le Problème des Partis bouge... de plus en plus »² que des indices permettaient de considérer comme une hypothèse raisonnable de pouvoir trouver une origine du « Problème des partis » dans des arithmétiques arabo-musulmanes du XIV^{ème} siècle ou antérieures³. À y regarder de plus près l'argument le plus fort -ou le moins

¹ Université Paris VIII Vincennes Saint-Denis, 2 rue de la Liberté 93526 Saint-Denis Cedex, nmeusnier@univ-paris8.fr. Mercis à Michel Armatte, Sylvain Piron et Maryvonne Spiesser qui ont lu cet article avec une attention critique qui m'a permis de lui apporter corrections et judicieuses précisions.

² [Meusnier, 2004] p. 25 : cet article est reproduit dans ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S en document annexe.

³ C'est cette hypothèse qu'Ivo Schneider soutient de plusieurs arguments à la fin de son article, [Schneider, 2005] : « Considering Leonardo's personal relations to mathematicians from the Islamic world, especially from the Maghreb, and considering the fact that there is a

faible- repose sur le fait que le *Liber Abaci* de Léonard de Pise⁴ de 1202 apporte des preuves de la transmission dans la culture de certains marchands italiens du XIII^{ème} siècle des pratiques arithmétiques enseignées et utilisées alors au Maghreb⁵. C'est le cas en particulier des « problèmes de compagnie » qui ont en commun avec le « problème des partis » d'être des problèmes de « partage » des gains espérés dans le cadre d'une association volontaire entre plusieurs personnes. « Avec ces problèmes de partage, nous ne sommes pas loin du problème des partis »⁶ écrivait Coumet dès 1970.

Si le problème des partis concerne des joueurs qui jouent ensemble et non des marchands qui sont associés dans une compagnie, la situation des uns et des autres est cependant la même du fait qu'ils sont liés entre eux par un contrat aléatoire. Les composantes du problème des partis telles que nous les donnons à voir les solutions de Ohri et de Ohrigens⁷, dès la fin du XIV^{ème} ou au début du XV^{ème} siècles, sont :

- a) un jeu en plusieurs parties, qui n'est pas précisément un jeu de hasard, sinon pas du tout un jeu de hasard, dont le vainqueur est celui qui le premier a remporté un nombre, défini à l'avance, de parties,
- b) des mises identiques déposées par chacun des joueurs, qui constituent l'enjeu qui est attribué au vainqueur,
- c) une interruption du déroulement du cours prévu du jeu à un moment quelconque et pour une raison quelconque,
- d) la recherche par un calcul arithmétique (sinon algébrique) de la part qui doit revenir à chacun des joueurs au moment de l'interruption du jeu,
- e) une solution, à ce problème de partage, qui prend en compte l'analyse de ce qui aurait pu advenir si le jeu s'était déroulé jusqu'à son terme.

Il convient donc de regarder comment se présentent les problèmes de partage du type des problèmes de compagnie que l'on rencontre dans les arithmétiques commerciales italiennes entre le XIII^{ème} et le XV^{ème} siècle. Les marchands, qui en raison du développement considérable du commerce sur mer et sur terre ont alors besoin de rassembler des capitaux qui dépassent les capacités de chacun d'entre eux, s'associent de manière contractuelle dans des « sociétés » (attestées depuis le XII^{ème} siècle) dont les deux types principaux de contrats sont la « compagnie » et la « commande »⁸. Dans la « compagnie simple » tous les contractants

manuscript from the 13th century, the book of games, ascribed to king Alfonso X, el Sabio, which deals in a chapter devoted to dicing with dicing problems similar to those in *De Vetula* and that Alfonso's court, like that of Frederick II in Sicily, was open for Christians and Moslems, it does not seem too far-fetched to assume a comparable situation. Clearly since the terminology stemmed at least in part from the Arabic, games of chance and the idea of attacking special problems concerning games of chance mathematically seems to be imported from the Islamic world. How far the concrete solutions found in the above-mentioned texts go back to Islamic sources or are original results found by European mathematicians cannot be decided in the light of the currently available source material ».

⁴ Léonard de Pise est également connu sous le nom de Fibonacci.

⁵ Voir à ce sujet [Sesiano, 1988] et [Djebbar, 2001-a].

⁶ [Coumet, 1970] p. 582.

⁷ Pour « Ohri » et « Ohrigens » voir [Meusnier, 2004] p. 6 et p. 22.

⁸ Voir à ce sujet [Simi, 2001].

sont dans la même situation : ils contribuent à la société pour un certain « capital⁹ » et ils participent (à égalité) au fonctionnement de la société par leur « travail »¹⁰. Les bénéfices (ou les pertes) de la société à la fin du contrat qui était prévue à une date précise, sont alors partagés entre les associés proportionnellement au capital initialement apporté par chacun d'entre eux. On trouve des problèmes de ce type dans les arithmétiques commerciales depuis le *Liber Abaci*¹¹ du tout début du XIII^{ème} siècle, qui sont le support d'une initiation des futurs marchands aux délicats calculs qu'implique le maniement de la « règle de trois » afin de trouver la solution du partage en proportion. Une variante de la compagnie simple est la « compagnie à durée limitée »¹² qui est une compagnie simple dans laquelle tous les associés ne sont pas engagés pendant la même durée ; le partage se fait alors proportionnellement au capital et au temps. Il est important de remarquer que si le temps intervient dans les contrats de compagnie simple pour définir la durée du contrat il n'entre pas en ligne de compte dans le calcul des parts comme c'est le cas dans la compagnie à durée limitée. Ainsi dans les problèmes de compagnie simple traités dans les arithmétiques commerciales, la durée du contrat n'est-elle pas précisée ; c'est le cas dans le *Liber Abaci* qui, il faut aussi le remarquer, ne considère aucun problème de compagnie à durée limitée.

2 Les problèmes portant sur des ruptures de contrats de commande.

Les contrats de commande introduisent une distinction dans le statut des contractants dont certains -les « marchands »- vont contribuer à la société par un apport de capital (et uniquement de capital) et les autres -les « facteurs »- par leur travail ou leur travail

⁹ Un terme souvent utilisé est : « le principal ».

¹⁰ C'est par commodité que j'emploie ici les termes de « capital » et de « travail » qui sont précisément en train d'être conceptualisés à ce moment là. Voir à ce sujet [Piron, 1999], en particulier le Chapitre 4 : Usure et Capital. Piron écrit : « Cette notion de capital, faut-il le rappeler, Olivi la reprend d'un vocabulaire usuel. Il l'élève au concept, pour désigner un usage spécifique de la monnaie qui ne se confond pas avec l'usure. [...] Il reconnaît certes que les contrats capitalistes se nouent généralement *inter mercatores*. L'extension sociale de la pratique de la *commenda* à la fin du treizième siècle est toutefois bien plus large. [...] Dans l'analyse qu'il propose de ces contrats apparaît une figure qui n'est pas nécessairement celle d'un marchand – celle du capitaliste (*tradens capitalis*) qui apporte au marchand une somme destinée à être engagée dans un cycle commercial. [...] Pour qu'il en soit ainsi (que le risque ou l'incertitude excusent du péché d'usure) [...] le prêteur doit conserver tant la propriété que l'usage du capital. Il doit assumer seul les risques de ne pas retrouver la somme investie, et doit, de manière médiate ou immédiate, participer à l'opération. [...] C'est bien le capitaliste qui supporte l'ensemble du risque du capital et des profits qui peuvent en être obtenus. Le partage des profits, fixé dès l'origine du contrat, s'analyse comme une vente du profit probable de l'opération. Cette notion de valeur probable est la clé de toute cette construction. Ce n'est pas un mince savoir que de saisir une probabilité en tant que telle, disait Olivi dans un autre contexte. C'est ce que l'on constate ici. Le résultat de l'opération peut être évalué à l'avance, en tant que probabilité de gain, et vendu, puisque tout ce qui peut être évalué par un prix temporel peut être vendu. C'est sur cette probabilité même que porte le contrat, dont le capitaliste vend une partie au marchand. Ils sont de la sorte l'un et l'autre intéressés à la réussite de l'opération ». Ch. 4, p. 62-63.

¹¹ Le *Liber Abaci* comprend 15 livres écrits en latin ; le 10^{ème} porte sur « Les sociétés » et il contient 11 problèmes sur des sociétés de 2, 3 ou 4 hommes ; tous relèvent de contrats de compagnie simple. Voir à ce sujet [Sigler, 2002].

¹² Je reprends ici la terminologie de Annalisa Simi : [Simi, 2001] p. 84-89.

accompagné d'un apport de capital¹³. Ce type de contrat de société fixe alors la proportion dans laquelle seront partagés les bénéfices au terme du contrat. En soi ce type de contrat ne présente que peu d'intérêt dans le cadre de l'initiation au calcul des partages proportionnels que proposent les arithmétiques commerciales, car le contrat définit un partage des bénéfices selon une proportion très simple, comme la moitié au marchand et la moitié au facteur, ou bien le partage de la totalité du capital et du bénéfice dans la même proportion. Cependant les contrats de commande servent de support à de nouveaux problèmes de partage à partir du moment où le contrat n'est pas respecté, soit parce que l'un des contractants n'a pas apporté dans la société le capital qu'il s'était engagé à y mettre¹⁴, soit parce que le contrat est interrompu avant son terme¹⁵. Je désigne cette nouvelle situation du nom de : « rupture temporelle de contrat ». Voici un exemple, souvent considéré comme le plus ancien, de ce type de problème datant de 1328¹⁶ :

« Fais-moi cette raison. Ils sont 2 compagnons qui font compagnie ensemble et l'un met 300 livres et l'autre 200 livres et doit durer 3 ans et il est convenu qu'entre eux 2 que le gain qu'ils feront au bout des trois ans devra être partagé par 1/2. Quand on arrive au bout de 20 mois, ils veulent partager et trouvent un gain de 200 livres. Je veux savoir combien aura chacun.

Fais ainsi. Vois d'abord ce que chacun doit en avoir selon son capital et, parce que un a 2 centaines et l'autre 3 centaines, nous ajouterons ensemble 2 et 3 qui font 5 et 5 sera le diviseur. Dès lors nous dirons: 2 par 200 fait 400 à diviser par 5 et il en vient 80. Et 80 aura celui qui a mis 200 livres et l'autre devrait avoir le reste jusqu'à 200 livres qui sont 120 livres. Maintenant nous dirons: s'ils avaient été 3 ans et avaient ces 200 livres de gain, chacun aurait eu 100 livres. Dès lors, tu vois combien il y a à diviser de 100 livres qu'aurait celui des 80, qu'il doit avoir par raison, et il y a 20 livres, par quoi dirons que en 36 mois il aurait eu 20 livres. Combien aurait-il eu en 20 ? Pour ce multiplie 20 par 20 qui fait 400 à diviser par 36 et il en vient 11 livres 1/9 de livre. Ajoute les à 80, elles sont 91 livres 1/9 et celui des 200 livres aura 91 livres 1/9 de livre et l'autre aura le reste jusqu'à 200 livres soit 108 livres et 8/9 d'une livre et on fait ainsi les raisons semblables. »

L'énoncé du problème ne mentionne pas explicitement un « marchand » et un « facteur », mais le gain devant être partagé par moitié au bout de trois ans au lieu de l'être proportionnellement à leur apport en capital, il s'agit donc d'un contrat de commande dans lequel celui qui a mis 200 livres peut être considéré comme le facteur qui fournit en outre son

¹³ Avec les contrats de commande intervient la question de l'usure qu'introduit celui des contractants qui n'apporte que du capital et va en retirer un profit sans aucun travail. « À partir des dernières décennies du XII^{ème} siècle, les canonistes et théologiens ont eu recours à des arguments fondés sur la notion de *periculum* pour justifier la prohibition de l'usure, c'est-à-dire, l'interdiction de toute rémunération directe sur un prêt. [...] L'emprunteur acquiert la pleine possession des biens remis en prêt dont il devra rendre l'équivalent au terme du délai accordé. De ce fait, il en supporte le *periculum*. Ce critère permet d'opposer le *mutuum* (prêt gratuit) à la location, dans laquelle le loueur conserve la propriété du bien loué, en assume les risques de perte et peut légitimement en demander un prix. » [Piron, 2004] p.72.

¹⁴ Dans certains cas ce capital est moindre, dans d'autres il est plus important.

¹⁵ Il peut arriver que le contrat soit au contraire prolongé, mais cette situation n'entre pas en ligne de compte dans ma présente (dé)monstration que je cherche à rendre la plus claire possible sans vouloir présenter de manière exhaustive tous les cas repérés.

¹⁶ Paolo Gherardi, *Trattato di ragioni*, ms Magl. Cl-XI-86, Bibliothèque Nationale, Florence. J'utilise ici une traduction inédite de Jean Cassinet (p.27) que m'a communiquée Maryvonne Spiesser

travail. Remarquons que la rupture du contrat se fait d'un commun accord. Les principes de la solution sont donc les suivants :

- a) considérer la part qui reviendrait à chacun comme s'il s'agissait d'une compagnie simple, ici 80 livres pour le facteur,
- b) **considérer le gain au moment de la rupture du contrat comme le gain au moment du terme prévu**, et donc le diviser en deux pour calculer alors la part de chacun¹⁷, ici 100 livres,
- c) considérer la différence entre les deux comme la mesure de la valeur du travail du facteur pour la durée du contrat initial, ici 20 livres pour 36 mois,
- d) calculer proportionnellement à la durée du contrat effectif la valeur du travail du facteur, ici $20/36$ de 20 livres, soit 11 livres et $1/9$ de livre,
- e) ajouter cette valeur du travail du facteur à sa part de profit proportionnel au capital, c'est le montant de sa part, ici 91 livres et $1/9$ de livre,
- f) déduire la part du facteur du gain obtenu, c'est la part du marchand, ici 108 livres et $8/9$ de livre.

Le premier exemple connu jusqu'à présent d'une telle situation¹⁸ de rupture temporelle de contrat se trouve dans un manuscrit du XIII^{ème} siècle¹⁹. Il concerne un contrat de société connu sous le nom de « bail à cheptel » d'un genre formellement identique au contrat de commande du point de vue du calcul mais fondamentalement différent du point de vue juridique et théologique à cette époque. En effet le capital n'est pas dans ce type de contrat de l'argent mais des brebis, et le profit, de nouvelles brebis. Un tel contrat tombe plus difficilement sous le coup de la critique de l'usure²⁰ et offre même un modèle pour penser par

¹⁷ Ce principe m'a paru pendant longtemps assez difficile à interpréter, ce qui me conduisait à le considérer comme « arbitraire » (voir plus loin le passage correspondant à la note 34). Il me semble depuis peu que la rupture se faisant ici dans le cadre d'un accord mutuel, les deux contractants pouvaient être d'accord pour considérer que s'ils étaient au terme du contrat ils partageraient comme convenu entre eux. Tout se passerait donc comme s'ils définissaient un nouveau contrat pour une durée plus courte ; mais, le travail n'ayant été effectué que pendant une portion du temps prévu, l'« avantage » du facteur devait être alors réduit proportionnellement. Il resterait à savoir s'il existe une base juridique à cette interprétation.

¹⁸ Je prends en compte dans cette note une remarque fort judicieuse de Michel Armatte en attirant l'attention du lecteur sur le fait que je distingue trois niveaux de réalité : le premier, celui que je nomme « situation » qui est d'ordre pratique, le deuxième que je nomme « problème » qui en est la traduction rationnelle sur le plan juridique, et enfin le troisième que je nomme « exercice » qui en fait l'occasion d'une application et d'un entraînement d'ordre mathématique (voir à ce sujet le passage correspondant à la note 33).

¹⁹ Il s'agit du *Livro de l'Abbecho* de Maestro Umbro dont le XV^{ème} chapitre, « El quintodecimo capitolo sono de svariante regole de compagnie » comporte 16 problèmes. [Arrighi, 1989] p. 60-67. Il semble bien qu'on ne connaît pas de manuscrit contenant de tels problèmes entre celui de Fibonacci datant de 1202 et celui-ci.

²⁰ Voir à ce sujet [Piron, 1998], le chapitre 4 de [Piron, 1999] et [Piron, 2004]. « Maître influent à Paris dans les années 1180, Pierre le Chantre a été l'un des premiers théologiens à s'intéresser de près à des questions de morale pratique. Il a plusieurs fois recours à l'argument

analogie le calcul de la solution des problèmes de société concernant un contrat de commande dans lequel le capital est de l'argent. Voici ce problème tel que l'énonce Maestro Umbro :

« Se ce fosse ditta alchuna ragione de soceta, cioè uno huomo mette bestije 36 e uno altro ne mette 18 bestije a chotale patto che chuluie che mette le 18 le dèie tenere agne 3 e mese 3 e 1/4 de mese e chonpito quisto termene chiascuno ne dèie avere la mità sì che quiste che mette le bestie 18 le tiene 1 anno e 5 mese e 1/8 de mese e ciaschuna parte ène en choncordia de partirle e le bestije sonno 70 ; quante ne dèie avere ciascheuno sì che non sia emgannato ? Regole che noie devemo fare de agne 3 e mese 3 e 1/4 de mese tutte dine, che sono dine $\frac{1}{2}$ 1777²¹ egl qualle è partedore. Or devemo fare de mese 17 e 1/8 de mese tutte dine, che sono dinè $\frac{3}{4}$ 513 e daschè n'avemo fatte tutte dine sì devemo piglare la terça parte di tutte le bestije che sonno $\frac{1}{4}$ 23²². Or devemo dire : da $\frac{1}{3}$ enfina em 35 sia $\frac{2}{3}$ 11 cioè la mità che devea avere, lo quale $\frac{2}{3}$ 11 devemo multiplicare per lo tempo che l'ha tenute cioè di $\frac{3}{4}$ 513 via $\frac{2}{3}$ 11 che fa 71925²³ e partire per $\frac{1}{2}$ 1777 che ne viene bestije 1709/2372 3²⁴ lo quale devemo giognere sopra a le bestije k'avea en prima, cioè sopra a $\frac{1}{3}$ 23, ed averaie ke farà bestije 5999/7116 26²⁵ e chotante n'avea choluie che mise bestije 18 e choluie che mise le 36 ne dèie avere 1217/7116 ed è facta. »²⁶.

Un homme met donc en société 36 bêtes avec un autre qui en met 18 et doit les garder en tant que berger pendant 3 ans 3 mois et 1/4 de mois, temps au bout duquel chacun des deux aura la moitié du troupeau ; mais au bout de 1 an 5 mois et 1/8 de mois ils sont d'accord pour arrêter leur association au moment où le troupeau comprend 70 bêtes. Comment doit-on faire le partage ? Les principes de résolution utilisés sont les mêmes que ceux énoncés

du *periculum* pour discerner la présence ou l'absence d'usure. C'est notamment le cas dans un paragraphe consacré à des cas « subtils », qui traite d'une forme de bail à cheptel. Les bailleurs qui confient la garde de leur troupeau en échange d'une redevance annuelle mais sans assumer les risques de perte, écrit-il, « veulent faire à leurs moutons ce que Dieu ne veut pas faire, que leurs moutons soient immortels. Car quoi qu'il arrive aux moutons, aucun péril ne menace le créancier ». L'image des « moutons immortels » est restée célèbre dans les discussions postérieures sur ces contrats, qui convergent pour réclamer que les pertes et les fruits soient équitablement partagés entre le bailleur et le preneur. » [Piron, 2004] p. 72. Voir aussi la septième précision sur les contrats usuraires de la deuxième partie du *Traité des contrats* de Pierre de Jean Olivi dans la traduction de Sylvain Piron qui est à paraître.

²¹ Je ne donne pas ici le détail des calculs, mais je signale au lecteur plusieurs « erreurs » qui proviennent de l'auteur des calculs. En particulier il faudrait lire ici « $\frac{1}{2}$ 1177 » c'est-à-dire 1177 jours et $\frac{1}{2}$ jour (en considérant des mois de 30 jours) pour la durée prévue initialement dans le contrat ; par la suite on voit que l'auteur des calculs s'appuie sur la valeur erronée provenant probablement de la confusion d'écriture entre un « 1 » et un « 7 ».

²² Il faut lire « $\frac{1}{3}$ 23 », mais ce n'est ici qu'une erreur d'écriture locale qui n'est pas reprise par la suite.

²³ L'auteur oublie de dire que 71925 doit être divisé par 12, mais il en tient compte dans ses calculs.

²⁴ En faisant les calculs avec « $\frac{1}{2}$ 1777 » l'auteur devrait trouver « 1787/4266 3 » au lieu de « 1709/2372 3 ». Avec « $\frac{1}{2}$ 1177 » on trouve « 255/2826 5 » ce qui permet de penser qu'il a bien utilisé « $\frac{1}{2}$ 1777 » pour son calcul

²⁵ Un calcul relativement simple permet de constater que pour obtenir ce résultat l'auteur a utilisé « 1209/2372 3 » au lieu de « 1709/2372 3 » comme il l'écrit. Mais « 1209/2372 3 » ce n'est toujours pas « 1787/4266 3 » et là, malgré tous mes efforts, je n'ai pas trouvé la suite des « erreurs » qui a pu le conduire à cela.

²⁶ [Arrighi, 1989] p. 64 : il s'agit du 11^{ème} problème du chapitre. Je remercie Annalisa Simi de m'avoir communiqué ce texte.

précédemment. On trouve un autre exemple de ce type de problème résolu par la même méthode dans un autre manuscrit du XIV^{ème} siècle²⁷.

3 Un nouveau type de problème de rupture de contrat.

Dans un manuscrit de Maestro Gilio de 1384²⁸ on trouve un nouvel exemple de rupture temporelle de contrat :

« Ils sont trois qui font une compagnie : le premier met 640 £, le second 940 £ et le troisième 1230 £ et ils prennent un facteur et disent : cet argent tu t'en occupes et au bout d'un an tu auras le tiers du gain. Il arrive qu'il ne reste dans la compagnie que 9 mois et qu'il y a alors un gain de 1790 £. Je demande combien touche le facteur et ce qu'a chacun des autres ».²⁹

La méthode de résolution n'est plus la même. Dans ce cas Maestro Gilio, au lieu de considérer le gain au bout de 9 mois comme le gain au bout du terme prévu, calcule le gain qui aurait été obtenu par la compagnie si le facteur avait respecté les termes du contrat. Cela il le fait en proportion du temps, comme les 12/9 de 1790, soit 2386 et 2/3. Il considère alors que le partage doit se faire à partir de cette valeur et que les 3 marchands de la compagnie doivent donc se partager proportionnellement à leur capital initial, 2386 £ et 2/3 £ moins 1/3 de cette somme (qui serait revenu au facteur pour son travail si celui-ci l'avait effectué jusqu'à son terme prévu), c'est-à-dire 1591 £ et 1/9 £ qu'il faut donc prélever sur les 1790 £ de gain. Il reste alors pour le facteur 198 £ et 8/9 £.

La méthode diffère de la précédente uniquement parce que, si nous sommes bien en présence d'un problème de rupture temporelle de contrat, cette fois-ci la rupture ne se fait pas par consentement mutuel. **La rupture est maintenant le fait de l'un des contractants sans l'accord des autres**, et d'un point de vue juridique les autres associés ne doivent pas être lésés par rapport à ce qu'ils étaient en droit d'attendre du déroulement de la compagnie dans les termes du contrat. Il faut donc calculer d'abord leur part sur **un gain virtuel estimé au terme prévu du contrat** et considérer que ce qui reste lorsqu'on a déduit cette quantité du gain effectif au moment de la rupture unilatérale du contrat est la part de celui qui est le responsable de cette rupture. Il convient donc de distinguer parmi les problèmes de rupture de contrat ceux que l'on rencontre dans les premiers manuscrits qui concernent des « ruptures temporelles de contrats avec accord des contractants » et ceux que l'on rencontre, semble-t-il ultérieurement, à partir de la deuxième moitié du XIV^{ème} siècle et qui concernent des « ruptures temporelles de contrats unilatéralement de la part de l'un des contractants ». Ces derniers sont à ma connaissance très rares mais entraînent, lorsque la rupture du contrat est exprimée de manière clairement unilatérale, la considération de ce qu'aurait du être le gain au terme prévu du contrat. Voici un cas plus tardif, que l'on trouve dans « Le Kadran aux marchans » de Jehan Certain, qui est très explicite :

²⁷ Scuola Lucchese, Libro d'abaco, [Arrighi, 1973] p. 141. Annalisa Simi classe ce manuscrit entre celui de Paolo dell'Abaco (c. 1340) et celui d'Antonio de' Mazzinghi (c. 1360 – c. 1390), [Simi, 2001] p. 80.

²⁸ Pour cette datation voir [Franci, 1983] p. III-VII ; il n'existe pas actuellement de transcription publiée de la partie du manuscrit qui porte sur les problèmes de société. Voir à ce sujet [Simi, 2001] p. 87 et 104.

²⁹ Je traduis le passage que cite Annalisa Simi et je m'appuie sur la description qu'elle donne de la solution de l'auteur car je n'ai pas consulté le manuscrit.

« Item ilz se font plusieurs manieres de compaignies avecque convenances ou paches expres qui seroient difficilles a juger. Comme dire ung marchant a baillé a son facteur 500 L de monnoye qu'il les gouverne pour 6 ans et a cap de temps il luy donnera la moictié du principal. Il advient que le facteur s'en veult aller a cap de 4 ans et si a bien gouverné que en 4 ans il a gagné 1000 escuz. L'on demande comme doit estre payé ledit facteur. Il y a aucun qui dirait que le facteur doit avoir les 2/3 de ce que le marchant lui avoit promis car il a gouverné les 2/3 du temps que il avoit promis. Et je dis que se il n'avoit paches expres que l'on doit regarder, cy le facteur eust gouverné 6 ans, combien il eust gagné a pris de ce qu'il a gagné en 4 ans que il a servy. Et ce que il eust gagné de plus que il n'a gagné luy doit estre rabatu pourveu que le tort soit du facteur. Et la maniere de faire ceste raison est telle. Vous devés ainsi dire : si 4 ans que il a servy ont gainné 1000 d, que eussent gagné 6 ans ? multipliés 6 pour 1000, monte 6000, partés pour 4, il en vient 1500. Et 1500 d eust gainné. Et il n'a gainné que 1000 d, pourquoy auroit a refaire le facteur au marchant 500 d. Et le marchant luy doit donner la moytié 500 L qui est son principal, sont 250 L. Et si le tort estoit du marchant, le facteur devroit avoir 250 L sans rien refaire comme se il eust servy tout son temps. »³⁰.

De même dans le premier traité du manuscrit de Cesena³¹, datant de la deuxième moitié du XV^{ème} siècle, on trouve, chez un auteur qui étudie systématiquement les cas possibles de rupture de contrat sur les mises et dans le temps, 9 problèmes de rupture temporelle dans lesquels les principes de la solution sont explicitement rattachés au principe juridique de ne pas porter préjudice à celui qui n'est pas responsable de la rupture. Voici le premier de ces problèmes :

« Il est un marchant qui a baillé a son facteur 60 francz pour les gouverner en marchandise par l'espace de 6 ans et au chief des 6 ans ils partiront par moictié tout le gaing. Advient que au chief de 4 ans ilz ont trouvé 48 francz de gaing et veult le marchant donner congé a son facteur. Assavoir mon combien le marchant luy doit bailler des 48 francs de gaing ?

Response, puis que en 4 ans les 60 francs ont gagné 48 francz ilz en eussent gagné en 6 ans 72 de quoy le facteur en eust eu la ½ qui est 36 francs. Et tant conviend que le facteur en aye, **ou autrement, on luy feroit tort**. Et le residu des 48 qui est 12 est pour le marchant.

[fol. 117 r°]

Pareillement si le facteur ne eust voulu servir que 4 ans il ne eust eu que 12 francz et le marchant 36 **ou autrement l'ung porteroit dommage a l'autre**.

Et note que en ceste raison et aussi es autres cy apres ensuivant l'on doit entendre que le principal gagne et non pas le gaing car autrement telles raisons ne se pourroient pas bien faire³² ».

³⁰ Jehan Certain, *Le Kadran aux marchans*, Bilbault en Bisquaye (Bilbao), ms 2904, (1485) Bibliothèque de l'Arsenal, Paris. Je remercie Maryvonne Spiesser de m'avoir communiqué sa transcription de ce problème.

³¹ Il s'agit du *Traicté de la pratique d'algorisme*, premier traité, anonyme, du manuscrit S-XXVI-6 de la Bibliothèque Malatestiana de Cesena ; voir à ce sujet [Spiesser, 2003] p. 23-25. Je reprends ici la transcription de Stéphane Lamassé (qui doit l'éditer) et Maryvonne Spiesser.

³² Cette dernière phrase est assez ambiguë. Maryvonne Spiesser propose de l'interpréter de la façon suivante : « Dans ce problème et dans ceux qui suivent on doit comprendre que le gain se fait sur le capital et non sur le gain car autrement de tels problèmes ne pourraient pas être résolus correctement ». Il paraît raisonnable de comprendre, pour la première partie de la phrase, que le profit se fait sur le capital initial et qu'après la rupture du contrat on calcule en proportion ce que ce capital aurait rapporté au terme du contrat et donc dans les conditions de ce contrat ; bref, on ne va pas considérer le profit, au moment de la rupture, comme un

4 Quelques thèses sur la filiation des problèmes de partage.

La description que je viens de proposer des problèmes de compagnie qui font intervenir des ruptures temporelles de contrat entre le XIII^{ème} et le XV^{ème} siècles paraît mettre en évidence une évolution chronologique. Un type tout à fait nouveau de problème de partage, dont le but n'est pas simplement d'être le support d'exercices plus ou moins artificiels de calcul de proportion³³, apparaît à la fin du XIII^{ème} siècle sur le support des contrats « dissymétriques par rapport au capital » que sont les contrats de commande. Mais c'est encore ultérieurement que l'on trouve les premiers exemples de rupture temporelle de contrats dissymétriques dans lesquels intervient pour la première fois la considération de ce qui serait advenu si le contrat n'avait pas été interrompu. Je pense avoir clairement montré que cette intervention de la prise en considération du futur est la conséquence de la prise en compte d'un principe de justice visant à attribuer à celui qui n'est pas responsable de la rupture du contrat ce qu'il était en droit d'attendre du contrat si celui-ci était allé jusqu'à son terme ; il s'agit maintenant d'une rupture temporelle unilatérale de contrats dissymétriques alors que dans les contrats précédents la rupture se faisait par accord mutuel. C'est dans ces conditions que l'on voit intervenir la nécessité d'envisager ce qui serait arrivé au terme du contrat afin de savoir ce que le contractant qui ne doit pas être lésé, puisqu'il n'est pas responsable de la rupture, doit avoir comme part dans le partage. La question se pose alors d'estimer le montant des gains à ce terme prévu alors que l'on connaît le montant des gains au moment de la rupture. Nous voyons que, dans tous les cas que nous avons rencontrés, la solution est basée sur le fait de supposer que le futur va se dérouler comme le passé et donc d'estimer le gain futur proportionnellement au gain passé ce qui, en termes d'arithmétiques commerciales, permet de ramener là encore le problème à un simple exercice de règle de trois. Mais il faut bien prendre la mesure de la différence radicale qu'il y a à se placer ainsi dans le futur en l'estimant sur un principe de continuité et la façon dont les problèmes de rupture temporelle de contrat sont résolus dans le cas d'un accord mutuel en supposant arbitrairement, comme nous l'avons vu plus haut³⁴, que le gain est le gain au terme du contrat.

Maintenant, je propose l'hypothèse que ces nouveaux problèmes de rupture temporelle unilatérale de contrats dissymétriques, que l'on ne trouve pas parmi les premiers exemples de rupture de contrats du XIV^{ème} siècle, apparaissent sous la pression des pratiques des marchands. Il est raisonnable de penser que ces marchands partagent avec les « mathématiciens-abacistes » qui les fréquentent ces questions et que certains de ces mathématiciens peuvent même se retrouver eux-mêmes en situation de prêter de l'argent. Ces situations étant « modélisées » dans les cas les plus simples et ayant fait intervenir consciemment le futur dans l'estimation calculée des gains au terme du contrat, il devient alors possible, peut-être par jeu intellectuel de se poser la question de l'estimation du futur,

nouveau capital, et calculer le profit sur le profit ce qui reviendrait à définir un nouveau contrat dans lequel le capital serait alors égal à 108, « gagnant » donc en proportion pour les 2 ans à venir 43 et 1/5, soit un gain pour les 6 années de 91 et 1/5 (et non pas de 72). Dans ces conditions comment faut-il interpréter la seconde partie de la phrase ? Faut-il comprendre : « ces problèmes ne seraient pas correctement résolus » parce qu'on mélangerait ainsi deux types de calculs, en proportion et en « intérêts composés », ou bien « ces problèmes ne pourraient pas être facilement résolus » car il faudrait être capable de calculer en termes d'intérêts composés le gain de 48 pour 4 ans, afin de pouvoir le faire dans les mêmes conditions pour 6 ans ?

³³ Voir la note 18.

³⁴ Voir le passage correspondant à la note 17.

c'est-à-dire du risque³⁵. Ce sont des questions que l'on voit précisément intervenir par ailleurs chez les théologiens franciscains de la deuxième moitié du XIII^{ème} siècle. Ceux-ci, de façon tout à fait originale, se préoccupent alors de répondre aux questions morales que doit affronter le « marchand chrétien » à un moment où par ailleurs commencent aussi à se développer les premières assurances³⁶. La question de l'estimation des futurs possibles peut maintenant émerger car le « marchand » sait très bien d'expérience qu'au terme du contrat il peut y avoir une perte comme un gain, comme certains problèmes le mentionnent³⁷. De même, quand le contrat est rompu notre marchand sait bien que s'il peut supposer que cela aurait continué aussi bien que précédemment, il pourrait lui arriver que tout se passe moins bien... ou mieux. Envisager alors le possible, dans ce contexte, au-delà de l'idée que ce soit grosso modo comme ce qui vient de se passer, est impossible de manière quantitative ou déterminée... Pourtant il existe une situation courante où cette pratique de l'analyse des futurs possibles trouve à s'exercer : c'est celle des jeux (de hasard ou non, a priori) dans laquelle le joueur (de dés par exemple³⁸) est confronté de manière assez simple au fait d'envisager ce qui peut lui arriver. C'est ce que manifeste assez bien d'ailleurs la trace que nous avons d'une telle forme de préoccupation dans le *De Vetula*³⁹, écrit dans la première moitié du XIII^{ème} siècle. Un passage assez long de ce texte décrit toutes les possibilités du lancer de trois dés, afin de mettre en évidence que toutes les sommes de points que l'on peut obtenir ne se présentent pas aussi souvent les unes que les autres ce qui permet d'estimer quantitativement leur force ou leur faiblesse respectives⁴⁰. Que ce passage, assez incongru au milieu d'un texte purement littéraire, mette en évidence l'intérêt, pour ne pas dire la fascination, qu'on pouvait alors trouver à cet exemple de maîtrise du possible et du futur, paraît aller de pair justement avec le développement des pratiques des marchands.

Je propose alors l'hypothèse que c'est en étant placé dans le contexte de ces situations d'incertitude devant l'avenir qu'a pu être inventée celle que décrit le problème des partis. Et j'insiste sur le fait de considérer qu'il s'agit précisément d'une invention et non de l'utilisation d'un problème préexistant et provenant d'un autre contexte. La situation que propose le problème des partis paraît bien artificielle contrairement à celle des partages dans les contrats de société ou les baux à cheptel. Quand, dans la pratique, la suite des parties qui

³⁵ Voir à ce sujet la remarquable étude de Sylvain Piron sur l'émergence du concept de risque dans [Piron, 2004] ; cet article est reproduit dans ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S en document annexe.

³⁶ Sur ces questions voir [Piron, 1998], [Ceccarelli, 1999] et [Ceccarelli, 2001].

³⁷ On peut supposer que, même s'il ne s'agit ici que du contexte des arithmétiques commerciales, cette mention d'un risque ait un rapport avec l'usure dont il faut se défendre. Ainsi Maestro Umbro écrit-il : « ... e per quisto chotala modo se degono fare le semeglante ragione de cholegança, perçio che cholegança non è usura ». [Arrighi, 1989] p.62. (Une « collegança » est une commande).

³⁸ Nous savons que ces jeux sont alors très pratiqués. Non seulement le jeu fait partie de la vie ordinaire de chacun et n'est réprimé que dans la mesure où il devient excessif, mais on voit que des auteurs comme Olivi et Oresme, dans des registres très différents, vont chercher des modèles de pensée de l'incertain dans des situations de jeu. Voir sur ce sujet [Ceccarelli, 1999] et [Meusnier, 1988] ; ces articles sont reproduits dans ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S en documents annexes.

³⁹ Sur le *De Vetula* voir [Bellhouse, 2000].

⁴⁰ « Plene cognosces quant ae virtutis eorum / Quilibet esse potest, seu quantae debilitatis » (vers 458-459). La traduction anglaise sur laquelle Bellhouse s'appuie, « You will learn full well how great a gain or a loss / Any one of them is able to be », n'est pas satisfaisante du point de vue d'une traduction à visée épistémologico-historique.

constituent un jeu peut-elle être interrompue définitivement, au point que le jeu ne puisse reprendre par la suite dans les conditions de l'interruption ? Je n'ai jamais trouvé d'évocation d'une telle situation en dehors des problèmes de calcul des arithmétiques commerciales, c'est-à-dire la situation proposée dans le problème des partis telle qu'on la trouve à la fin du XIV^{ème} siècle, postérieurement aux problèmes de rupture temporelle unilatérale de contrats dissymétriques. On peut donc faire l'hypothèse que le problème des partis est l'invention d'un maître de calcul familial des modes de pensées et des pratiques des marchands et des joueurs, ou d'un marchand tout aussi joueur et calculateur ; une invention non pas pour répondre directement à des questions de marchands mais rendue possible par la modélisation déjà effectuée sur les ruptures de contrat d'une part et la pratique de jeux que l'on gagne en plusieurs parties d'autre part. Dans ces conditions il devient possible de penser une situation artificielle dans laquelle le contrat serait rompu par l'interruption du jeu et dans laquelle on peut se demander ce qui pourrait arriver, précisément parce que la situation est suffisamment simple pour que l'on voie que plusieurs avenir sont possibles et que l'on peut très facilement les décrire. Le problème serait donc inventé parce que celui qui l'invente sait qu'il y a plusieurs avenir possibles et qu'il les connaît. Celui qui l'invente ainsi, peut alors se poser la question de savoir qu'elle est la valeur du partage dans les différentes situations qui peuvent se présenter. C'est une situation tout à fait différente qu'affrontent ceux qui ont oublié l'origine du problème et qui n'en connaissent plus que l'énoncé, c'est-à-dire vraisemblablement la situation qui se présente au moins à partir de la fin du XV^{ème} siècle⁴¹.

5 Une conjecture.

Bien sûr, il ne me paraît pas impossible, quand on sait l'importance que les mathématiciens arabo-musulmans ont attaché aux questions de dénombrement combinatoire⁴², que l'on trouve, au Maghreb peut-être, des textes traitant des jeux dans des termes proches de ceux que l'on rencontre dans le *De Vetula*. Néanmoins, une conséquence majeure des hypothèses que j'ai formulées précédemment est qu'on ne retrouvera pas la trace du problème des partis dans des textes arabo-musulmans antérieurs au XIV^{ème} siècle car ce problème ne pouvait pas y être formulé. En effet nous ne trouvons dans ces textes, à ma connaissance, aucun problème de partage à propos de rupture temporelle de contrat dissymétrique, ni a fortiori de rupture temporelle unilatérale nécessaire à son élaboration⁴³.

Les raisons d'une telle absence en sont probablement multiples et enchevêtrées de manière très complexe. Elles sont à la fois d'ordre social, économique, juridique et théologique... et je ne m'aventurerai certainement pas plus loin sur ce terrain où je ne dispose d'aucune connaissance. Il va de soi que je formule cette conjecture avec l'espoir que dans un manuscrit connu ou encore inconnu, une découverte vienne, le plus tôt possible, la réfuter.

⁴¹ Voir à ce sujet en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S. : [Coumet, 1965] et [Meusnier, 2004] p. 25-26.

⁴² Voir à ce sujet [Djebbar, 1985] et [Djebbar, 2001-b] p. 230-237.

⁴³ Voir à ce sujet [Sesiano, 1988], [Djebbar, 2001-a] p. 331, et [Souissi, 2001] p. 307. J'ai posé la question à Ahmed Djebbar, à plusieurs reprises depuis une vingtaine d'années, de l'existence de problèmes de rupture de contrats parmi les problèmes de compagnie que l'on trouve dans les ouvrages mathématiques arabo-musulmans et sa réponse demeure, à ce jour, négative.

Bibliographie

[Arrighi, 1973] G. Arrighi : Scuola Lucchese, *Libro d'abaco (Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Statale di Lucca)*, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Lucca, 1973.

[Arrighi, 1989] G. Arrighi : Maestro Umbro (Sec XIII), Livro de l'abbecho (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), a cura e con introduzione di Gino Arrighi, in *Bolletino della Deputazione di Storia Patria per l'Umbria*, LXXXVI, 5-140, 1989.

[Bellhouse, 2000] D.R. Bellhouse : *De Vetula* : a Medieval Manuscript Containing Probability Calculations, in *International Statistical Review*, 68-2, 123-136, 2000.

[Benoit, 1989] P. Benoit : Calcul, algèbre et marchandise, in *Éléments d'Histoire des Sciences, sous la direction de Michel Serres*, 197-221, Bordas, Paris, 1989.

[Ceccarelli, 1999] G. Ceccarelli : Le jeu comme contrat et le *risicum* chez Olivi, in *Pierre de Jean Olivi (1248-1298), Actes du colloque de Narbonne (mars 1998) édités par Alain Boureau et Sylvain Piron*, 239-250, Vrin, Paris, 1999. (Reproduit en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S).

[Ceccarelli, 2001] G. Ceccarelli : Risky Business : Theological and Canonical Thought on Insurance from the Thirteenth to the Seventeenth Century, in *Journal of Medieval and Early Modern Studies*, 31 : 3, 607-658, Duke University Press, 2001.

[Ceccarelli, 2007] G. Ceccarelli : The Price for Risk-taking : Marine Insurance and Probability Calculus in the Late Middle Ages, in *J.E.H.P.S*, 3-1, 2007.

[Coumet, 1965] E. Coumet : Le problème des partis avant Pascal, in *Archives internationales d'histoire des sciences*, 18 :73, 245-272, 1965. (Reproduit en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S).

[Coumet, 1970] E. Coumet : La théorie du hasard est-elle née par hasard ?, in *Annales : Économies, Sociétés, Civilisations*, 25-3, 574-598, Paris, 1970. (Reproduit en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S).

[Djebbar, 1985] A. Djebbar : L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Mun'im (XII^{ème}- XIII^{ème} siècle), in *Publications mathématiques d'Orsay*, 85-01, 1985.

[Djebbar, 2001-a] A. Djebbar : Les transactions dans les mathématiques arabes : Classifications, résolution et circulation, in *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée, Actes du Colloque international du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999)*, 327-344, Editions du C.I.H.S.O, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001

[Djebbar, 2001-b] A. Djebbar : *Une histoire de la science arabe*, Seuil, Paris, 2001

[Franci,1983] R. Franci : *M° Gilio. Questioni d'Algebra, dal Codice L.IX.28 della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Raffaella Franci*, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, VI, Siena, 1983.

[Franci, 2002] R. Franci : Une solution exacte del problema delle parti in un manoscritto della prima meta' del quattrocento, in corso di stampa, in *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 22, 253-266, 2002.

[Franklin, 2001] J. Franklin : *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2001.

[Gauvard, Libera, Zink, 2002] Collectif: *Dictionnaire du Moyen Âge*. Publié sous la direction de Claude Gauvard, Alain de Libera, Michel Zink, Quadrige/PUF, Paris 2002.

[Lamassé, 2001] S. Lamassé : Les exercices de compagnie entre commerce et mathématiques, in *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée, Actes du Colloque international du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999)*, 285-300, Editions du C.I.H.S.O, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001

[Le Goff, 1972] J. Le Goff : *Marchands et Banquiers du Moyen Age*. Que sais-je n°699, PUF, Paris, première édition 1956.

[Meusnier, 1988] N. Meusnier : À propos de l'utilisation par Nicole Oresme d'une argumentation « probabiliste », in *Nicolas Oresme. Tradition et innovation chez un intellectuel du XIVe siècle. Études recueillies et éditées par P.Souffrin et A.Ph. Segonds*, 165-177, Programma e 1+1 Editori et Les Belles Lettres, Padova-Brugine et Paris, 1988. (Reproduit en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S).

[Meusnier, 2004] N. Meusnier : Le Problème des Partis bouge... de plus en plus. Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales, n° 237, Série « Histoire du Calcul des Probabilités et de la Statistique » n° 60, EHESS-CNRS-PARIS IV, Paris, 2004. (Reproduit en annexe de ce numéro 3-1 du J.E.H.P.S).

[Pancanti,1984] M. Pancanti: : *Maestro Gratia de' Castellani, Chasi sopra Chonpagnie, dal codicePalatino della Biblioteca Nazionale di Firenze, a cura e con introduzione di Marisa Pancanti*, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, XI, Siena, 1984.

[Piron, 1998] S. Piron: Marchands et confesseurs. Le *Traité des contrats d'Olivi* dans son contexte (Narbonne, fin XIIIe-début XIVe siècle), in *L'Argent au Moyen Age. XXVIIIe Congrès de la S.H.M.E.S. (Clermont-Ferrand, 30 mai-1^{er} juin 1997)*, 289-308, Publications de la Sorbonne, Paris, 1998.

[Piron, 1999] S. Piron : *Parcours d'un intellectuel franciscain*, Thèse de l'E.H.E.S.S, Paris, 1999.

[Piron, 2004] S. Piron: L'apparition du resicum en Méditerranée occidentale, XIIe-XIIIe siècles), in *Pour une histoire culturelle du risque. Genèse, évolution, actualité du concept dans les sociétés occidentales*, sous la direction de E. Collas-Heddeland, M. Coudry, O.

Kammerer, A.J. Lemaître, B. Martin, 59-76, Editions Histoire et Anthropologie, Strasbourg, 2004.

[Piron, 2007] S. Piron: Le traitement de l'incertitude dans la scolastique médiévale, in *J.E.H.P.S.*, 3-1, 2007.

[Schneider, 2005] I. Schneider : The solution of the two main problems concerning games of chance in the late European Middle Ages and the possibility of Islamic sources, in *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 25, , 2005.

[Sesiano, 1988] J. Sesiano : Le Liber mahameleth, un traité mathématique latin composé au XIIe siècle en Espagne, in *Histoire des Mathématiques Arabes, Actes du Premier Colloque International sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Alger, 1-3 Décembre 1986*, 69-98, Maison du Livre, Alger, 2001.

[Sigler, 2002] L. Sigler : *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer-Verlag, NewYork-Berlin, 2002.

[Simi, 2001] A. Simi : La compagnia mercantile negli abacisti italiani del '300, in *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée, Actes du Colloque international du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999)*, 75-104, Editions du C.I.H.S.O, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.

[Souissi, 2001] M. Souissi : Applications des proportions –partages proportionnels, problèmes d'arithmétiques commerciales- règles de société, méthode de double fausse supposition, in *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée, Actes du Colloque international du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999)*, 327-344, Editions du C.I.H.S.O, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001

[Spiesser, 2003] M. Spiesser: *Une arithmétique commerciale du XV^e siècle, le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans*, Brepols, collection *De diversis artibus*, 70, Turnhout, 2003.